Así, la aproximación lineal (de primer orden) es

$$\begin{aligned} l(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= 1 + 0 + 0 = 1, \end{aligned}$$

y la aproximación de segundo orden (o cuadrática) es

$$\begin{aligned} g(x, y) &= 1 + 0 + 0 + \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi^2}{4}\right)(x-1)^2 + \left(-\frac{\pi}{2}\right)(x-1)\left(y - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}(-1)\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{\pi^2}{8}(x-1)^2 - \frac{\pi}{2}(x-1)\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Véase la Figura 3.2.1.

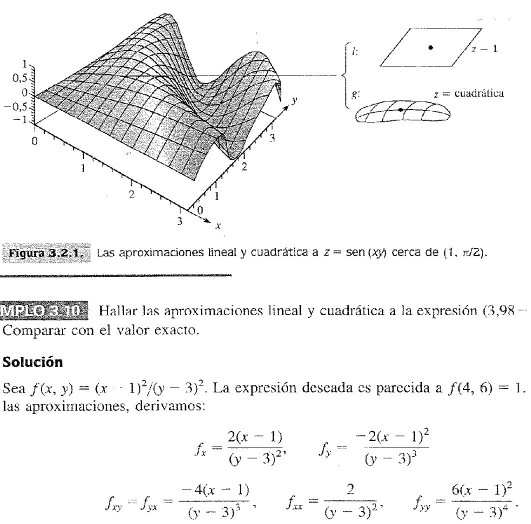

Figura 3.2.1. Las aproximaciones lineal y cuadrática a $z = \operatorname{sen}(xy)$ cerca de $(1, \pi/2)$.

EJEMPLO 3.10 Hallar las aproximaciones lineal y cuadrática a la expresión $(3{,}98 - 1)^2/(5{,}97 - 3)^2$. Comparar con el valor exacto.

Solución

Sea $f(x, y) = (x - 1)^2/(y - 3)^2$. La expresión deseada es parecida a $f(4, 6) = 1$. Para encontrar las aproximaciones, derivamos:

$$f_x = \frac{2(x-1)}{(y-3)^2}, \qquad f_y = \frac{-2(x-1)^2}{(y-3)^3}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{-4(x-1)}{(y-3)^3}, \qquad f_{xx} = \frac{2}{(y-3)^2}, \qquad f_{yy} = \frac{6(x-1)^2}{(y-3)^4}.$$

En el punto de aproximación, tenemos

$$f_x(4, 6) = \frac{2}{3}, \qquad f_y = -\frac{2}{3}, \qquad f_{xy} = f_{yx} = -\frac{4}{9}, \qquad f_{xx} = \frac{2}{9}, \qquad f_{yy} = \frac{2}{3}.$$

La aproximación lineal es entonces

$$1 + \frac{2}{3}(-0{,}02) - \frac{2}{3}(-0{,}03) = 1{,}00666.$$

La aproximación cuadrática es

$$\begin{aligned} &1 + \frac{2}{3}(-0{,}02) - \frac{2}{3}(-0{,}03) + \frac{2}{9}\frac{(-0{,}02)^2}{2} - \frac{4}{9}(-0{,}02)(-0{,}03) + \frac{2}{3}\frac{(-0{,}03)^2}{2} \\ &= 1{,}00674. \end{aligned}$$

El valor «exacto» utilizando una calculadora es 1,00675.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 6, determinar la fórmula de Taylor de segundo orden para la función dada alrededor del punto x_0, y_0.

1. $f(x, y) = (x + y)^2$, donde $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

2. $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2 + 1)$, donde $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

3. $f(x, y) = e^{x+y}$, donde $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

4. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}\cos(xy)$, donde $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

5. $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy) + \cos(xy)$, donde $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

6. $f(x, y) = e^{(x-1)^2}\cos y$, donde $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

7. (Difícil.) Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama ***analítica*** si

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + \frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k + \cdots$$

(esto es, la serie del segundo miembro converge y es igual a $f(x + h)$).

a) Supongamos que f satisface la siguiente condición: en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ existe una constante M tal que para todo $k = 1, 2, 3, \ldots$, $|f^{(k)}(x)| \leqslant M^k$ para todo $x \in [a, b]$. Probar que f es analítica.