Prof. Enrique Mateus-Nieves
PhD en Educación Matemática
DOI: 10.13140/RG.2.2.20792.37123. Oct 2020

Una reflexión sobre las Integrales Impropias

El concepto de *integral impropia* resulta de gran importancia para estudiantes que se forman profesionalmente en matemáticas o ingenierías por la gran cantidad de aplicaciones que tiene, entre ellas el cálculo de probabilidades para definir normas funcionales, el cálculo de transformadas de Fourier y Laplace y cálculos físicos (como el trabajo, la energía... en determinadas circunstancias). En particular, las integrales impropias cobran interés cuando son utilizadas para analizar el carácter de una serie de términos positivos a través del criterio de la integral y donde a partir de la solución de la integral impropia asociada a la serie se puede determinar el carácter de la misma y viceversa. Una de las necesidades reveladas es este estudio, radica en la poca claridad que poseen los estudiantes sobre la aplicación de contenidos relacionados con la integral y la ausencia de una conexión evidente con el entorno y con problemas de la vida cotidiana, y la poca literatura existente en Educación Matemática sobre el tema.

Conscientes de esta realidad desde el laboratorio de investigación que dirijo se han venido adelantando diferentes trabajos relacionados con los procesos de enseñanza y de aprendizaje del cálculo infinitesimal, en particular del cálculo integral. En Mateus-Nieves (2011, 2012, 2015, 2016 y 2019*a*, 2019*b*, 2020) se muestra al cálculo integral, encuadrado dentro del cálculo infinitesimal, y en Mateus-Nieves y Rojas-Jimenez (2020) como una rama de las matemáticas ubicadas dentro del Pensamiento Matemático Avanzado. En Mateus-Nieves (2020*a* en prensa) se muestra un estudio sobre la ontología de la integral identificando rupturas epistemológicas en la construcción y evolución del concepto de integral vistas como integrales definidas, indefinas e impropias (de primera, segunda o tercera especie).

Con los procesos de enseñanza y de aprendizaje de matemática universitaria se espera que al finalizar cursos como: Cálculo I, II, III y Análisis Matemático, los estudiantes hayan

Citation: Mateus-Nieves, E. (2020). Una reflexión sobre las Integrales Impropias. [A reflection on Improper Integrals]. Project: Research line in PhD education mathematics. Conference: Didactics of calculus (infinitesimal). Bogotá-Colombia. https://www.researchgate.net/publication/344728782. DOI: 10.13140/RG.2.2.20792.371.

fundamentales del cálculo integral que les permita llegar a ser competentes ante situaciones particulares del entorno laboral que impliquen el uso de integrales. Sin embargo, en la práctica educativa se observa que las integrales impropias son abordadas desde integrandos oscilantes, es decir sobre situaciones ajustadas para que la función sea integrable, son muy pocas las situaciones que se abordan y que puedan ser relacionadas con la cotidianeidad de un estudiante universitario, dejándole la tarea que sea él quien tiene que resolver los inconvenientes numéricos que estos problemas traen consigo. Situación que cobró interés para adelantar un trabajo de investigación, que permita identificar si los alumnos llegan a comprender adecuadamente estos conceptos y los relacionan con algunos conocimientos previamente estudiados (como sucesiones, series e integrales definidas e indefinidas), en su primer año de universidad, en el que toman contacto formal, por primera vez, con él calculo infinitesimal.

En este estudio notamos que la enseñanza universitaria tradicional centra la atención, en que el estudiante memorice criterios y trabaje en la resolución de múltiples ejercicios que involucran integrales impropias; sin embargo, la interpretación que se da a los resultados obtenidos son mínimas, no se consideran las paradojas que pueden aparecer, ni se buscan contraejemplos semejantes o análogos que permitan al estudiante profundizar en los conceptos, ahondar en conocimientos e indagar en situaciones análogas que le permitan alcanzar un nivel de competencia matemática eficaz para su desempeño profesional.

Observamos que varios estudiantes aprenden a usar como herramienta algunos conceptos relacionados con la integración impropia pero descontextualizados y desvinculados de contenidos aprendidos en cursos anteriores; encontramos que se limitan a memorizar un conjunto de criterios y técnicas que, de estar contextualizados, tendrían mayor significado para ellos. creemos que parte de la responsabilidad de esta situación recae en prácticas docentes inadecuadas, dado que, notamos centran su interés en enseñar estos temas ceñidos a lo que los libros de texto señalan, los toman como mapa de ruta y se limitan a las pocas situaciones allí planteadas quedando algunas descontextualizadas donde el uso de software matemático de apoyo es limitado, y en los casos en que lo utilizan, su uso se limita a una modelación geométrica, introducida como trabajo didáctico.

Los avances logrados hasta ahora en esta investigación muestran que analizar los primeros ejemplos de integrales impropias, estudiar la condición de Cauchy para convergencia de series e integrales, aplicar el criterio de la integral para convergencia de series es un reto para los estudiantes particularmente de ingenieras que terminan repitiendo de manera mecánica algoritmos y procesos que conllevan a una solución que pocas veces se valida, si responde, y en qué grado, a la petición de la situación problema propuesta. Por ejemplo: aplicar el primer y segundo criterio de comparación, tanto para integrales impropias de primera como de segunda especie; para los estudiantes resulta difícil determinar cómo_interactúan de forma dinámica entre sí, de modo que cualquier expresión algebraica introducida pueda ser representado gráficamente desde las diferentes herramientas de las que dispone el profesor para explicar el tema. Cuando se hace uso de software matemático resulta para el estudiante más fácil identificar esta relación. Situación que muy pocas veces se aplica en la práctica. Quizá por falta de recursos, quizá por falta de tiempo para cubrir los diferentes temas del syllabus de la asignatura.

En cierta medida, una vez elegida la función comparación adecuada, se puede tener indicios del carácter de la integral. Pero en muchas ocasiones es necesario una estimación numérica de ese valor. Para este fin, se dispone de una opción de cálculo aproximado (que genera el programa, aunque deba ser empleado un método numérico interno) de manera que en cada paso se calcula una integral de Riemann, generándose una secuencia finita de valores que nos presentan sucesivas aproximaciones numéricas.

La opción numérica correspondiente para cada integral impropia está disponible sólo si no está seleccionada la opción integral exacta. Al modificar la función comparación podría llegar a la situación de que ese límite es un número no nulo, en ese caso aparece la recta asíntota horizontal de la gráfica de la función cociente y el mensaje de que ambas integrales impropias tienen el mismo carácter. Situación poco comprensible para los estudiantes que no pueden visualizar el hecho.

Por ello recomendamos a los profesores presentar un listado de experiencias guiadas con algunas funciones integrando para que los estudiantes se familiaricen con el entorno de modelación y posterior simulación matemática, experimental y que les permita alcanzar significado del objeto matemático que aprenden, esto es desarrollo de la competencia matemática para aplicar este tipo de integrales a contexto tanto intra como extra matemáticos propios de su labor profesional.

Observaciones

Hemos identificado por comentarios de estudiantes que participan de esta investigación en curso, que los elementos ofrecidos desde este laboratorio les ha facilitado la comprensión de la integral como un ente matemático que a su vez es unitario y sistémico. Lo que conlleva a inferir la dificultad que tiene aprender a usar este tipo de integrales, sobre todo cuando la función integrando no posee una función primitiva conocida.

Como lo mencionamos al inicio de este escrito, una de las principales dificultades encontradas al planificar esta investigación fue la ausencia de trabajos publicados centrados en los procesos de enseñanza y de aprendizaje en el concepto de *integral*. Aunque éste aparece implícitamente en varios trabajos, se desarrolla generalmente en el marco de la integral definida. Pero no se presentan las integrales impropias como una extensión de las definidas. Lo que se observa es una enseñanza de entes aislados, desarticulados unos de otros, generando en los estudiantes ausencia de significados para la integral.

Orton (1983) detecta que la introducción de los alumnos a la integración se ve oscurecida por la manipulación algebraica. Como ejemplo presenta el cálculo de la integral de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en el intervalo [-1, 2] adjuntando la gráfica. Muestra que esta integral ofreció especiales dificultades a los alumnos participantes, dado que éstos sólo tenían conocimientos elementales sobre integración. Por su parte, Calvo (1997) destaca el hecho de que, al ilustrar la definición de integral definida, se suele presentar una curva sin patologías, un intervalo positivo, se usa un número razonable de rectángulos. Pero no se insiste en cuáles de estos elementos son esenciales y cuáles no.

Relacionado con este hecho, nosotros encontramos que nuestros alumnos no saben cuáles son las condiciones necesarias para definir la integral de Riemann. Observamos que identifican la integral como un área lo que puede dar lugar a falsas adscripciones de significado, de forma que los alumnos no diferencian el significado de la integral cuando la función es positiva y cuando la función es negativa.

Por otro lado, Schneider (1991) identifica varios errores cometidos por estudiantes en cálculos de áreas y volúmenes, que muestran la presencia de concepciones erróneas. En su trabajo identifica el obstáculo de *heterogeneidad de las dimensiones*, el cual induce a mezclar cantidades de dimensiones distintas (volúmenes con áreas y áreas con líneas). Las evidencias mostradas indican que este obstáculo tiene corte epistemológico.

Camacho y Aguirre (2001), plantean algunas integrales impropias a un grupo de alumnos y profesores; comprueban que tienen grandes dificultades para calcular sus valores y muchos se pierden en los cálculos algebraicos. Se observa también que tanto profesores como alumnos tienden a sustituir los valores extremos de la integral y no calculan las integrales utilizando procesos límite, sino generalizando la regla de Barrow y sustituyendo directamente los extremos de la integral en la variable, aun cuando uno de los extremos sea infinito.

Razones nos llevan a acotar nuestro campo de investigación inicial y a decantarnos solamente por el uso de los registros de representación gráfico y algebraico en un primer acercamiento al análisis de la comprensión de los alumnos de algunos conceptos básicos de la integración impropia, bajo la hipótesis de que los alumnos sólo están acostumbrados al trabajo en uno de ellos (el algebraico). se platea como reto, en cursos de matemática básica universitaria, la incorporación de situaciones problema que reflejen el uso de los conceptos y cálculos para dar interpretación a las soluciones, lo cual a su vez favorece el desarrollo de competencias, conocimientos y valores fundamentales.

En la investigación que adelantamos, buscamos identificar algunas dificultades, que los alumnos universitarios encuentran al aprender los conceptos relativos a la integración impropia; algunos de ellos parecen inherentes al propio concepto de *integral impropia* y otros vienen relacionados con ausencia de significado o con otros conceptos propios del cálculo integral, tal como función, limite, antiderivada, entre otros, que ya han sido registrados en la literatura en Educación matemática.

Para definir la integral de Riemann se imponen dos condiciones: que tenga un intervalo de integración acotado y que la función integrando sea acotada en este intervalo. Estas condiciones, además, aunque son necesarias para definir esta integral no son suficientes por sí solas para asegurar la integrabilidad de una función. Aquí consideramos que la modelación matemática se presenta como estrategia didáctica que permite simular e interpretar diferentes problemas y situaciones de la vida real o académica, poniendo en evidencia diferentes condiciones de aplicación de los contenidos de los cursos de matemática universitaria.

La estrategia busca solventar la necesidad de mostrar y manipular aplicaciones de los contenidos de integrales impropias, polinomios de Taylor, coordenadas polares y secciones cónicas en problemas con ejemplos concretos en las áreas de ciencias biológicas e ingeniería. La invitación a los miembros de este laboratorio es a continuar con este trabajo en miras de ofrecer elementos y estrategias didácticas a los profesores interesados en enriquecer su práctica docente universitaria, tema muy poco abordado.

Bibliográfica

Calvo, C. (1997). *Bases para una propuesta didáctica sobre integrales*. Tesis de maestría. UAB.

Camacho, A. y Aguirre, M. (2001). Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 4(3), pp. 237-265.

Mateus-Nieves, E. (2011). Epistemología de la derivada como fundamento del cálculo diferencial. *Voces y Silencios Revista Latinoamericana de Educación*, 2(especial):3-2. Bogotá. Colombia. DOI:10.18175/vys2. especial. 2011.01.

Mateus-Nieves, E. (2012). Reseña de la evolución del cálculo infinitesimal desde sus dos grandes ramas: El Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral. HISTORIA Y FILOSOFIA DE LASMATEMATICAS. [Overview of the evolution of infinitesimal calculus from its two main branches: Differential Calculus and Integral Calculus. HISTORY AND PHILOSOPHY OF MATHEMATICS]. Project: Research line in PhD education mathematics. Bogotá. D. C. https://www.researchgate.net/publication/347529138. DOI: 10.13140/RG.2.2.15412.27527.

Mateus-Nieves, E. (2015). *Evolución histórico-epistemológica del concepto de integral*. [Historical-epistemological evolution of integral concept]. Project: Research line in PhD education mathematics. Bogotá. D. C. DOI:10.13140/RG.2.2.32081.56164.

Mateus-Nieves, E. (2016). Análisis Didáctico a un Proceso de Instrucción del Método de Integración por Partes. [Didactic Analysis of an Instructional Process of the Integration Method by Parts]. *Bolema Boletim de Educação Matemática.* ISSN: 1980-4415, 30, pp.559-585. DOI:10.1590/1980-4415v30n55a13.

Mateus-Nieves, E. (2019a). *Extensiones al concepto de integral*. [Extensions to the integral concept]. Conference: Didactics of calculus (infinitesimal). Bogotá-Colombia. Project: research line in PhD education mathematics.

DOI:10.13140/RG.2.2.34282.95689.

Mateus-Nieves, E. (2019b). *Breve reseña de la integral*. [Brief overview of the integral]. Project: Research line in PhD education mathematics. Conference: Didactics of calculus (infinitesimal). Bogotá-Colombia. Nov.2019. DOI: 10.13140/RG.2.2.19373.51683.

Mateus-Nieves, E., & Hernández Montañez W. (2020). Significado Global de la Integral Articulando su Complejidad Epistémica. [Global Meaning of the Integral Articulating its Epistemic Complexity]. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. ISSN 1815-0640. Año XVI (60), págs.196-211.

Mateus-Nieves, E., & Rojas Jiménez, C. (2020). Mathematical generalization from the articulation of advanced mathematical thinking and knot theory. *Acta Scientiae. (Canoas*), 22(3), 65-81, Maio/Jun. 2020. ISSN: 2178-7727. DOI: 10.17648/acta.scientiae.5667.

Mateus-Nieves, E. (2020b). *Preliminares del cálculo integral*. Bogotá-Colombia. Project: Research line in PhD education mathematics. Conference: Didactics of calculus (infinitesimal). Bogotá-Colombia Agos.2019. DOI: 10.13140/RG.2.2.19373.51683.

Mateus-Nieves, E., Font, V. (2020b in press). Epistemic Complexity of the “integral” mathematical object**.** *IJMEST*. UK.

Mateus-Nieves, E. (2020). Preliminares del cálculo integral. [Preliminaries of integral calculus]. Agos.2019. Project: Research line in PhD education mathematics. Conference: Didactics of calculus (infinitesimal). Bogotá-Colombia.
DOI: 10.13140 / RG.2.2.19373.51683.

Mateus-Nieves, E. (2021). Four weaknesses found in higher education students learning improper integrals. Jun.2021. Project: Research line in PhD education mathematics. Conference: Didactics of calculus (infinitesimal). Bogotá-Colombia. https://www.researchgate.net/publication/352191526. DOI: 10.13140/RG.2.2.15784.90886.

Orton, A. (1983b). “Student´s understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14(3)*, 235-250.

Schneider, P. (1991). The Classic knowledge representation system: Guiding principals and implementation rationale. *SIGART Bul letin*, *2(3):108*, 113, 1991.