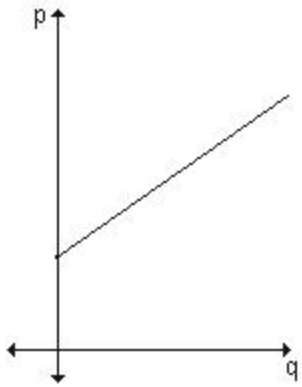
En este PDF encontrará los siguientes temas que debe estudiar para la clase:

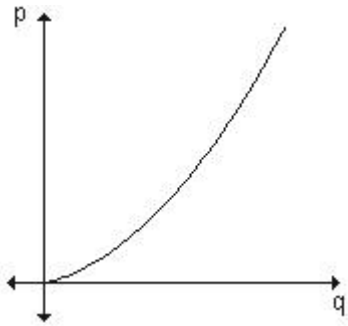
Función de oferta, superávit de consumidores y productores, análisis marginal: Costo marginal, Ingreso marginal, Utilidad marginal

Aplicaciones a la Administración y la Economía

Entre las funciones que se utilizan en economía para hacer modelos de situaciones de mercado se estudian las funciones de oferta y de demanda.

Función de oferta: una empresa que fabrica y vende un determinado producto utiliza esta función para relacionar la cantidad de productos que está dispuesta a ofrecer en el mercado con el precio unitario al que se puede vender esa cantidad. Podemos decir que, en respuesta a distintos precios, existe una cantidad correspondiente de productos que los fabricantes están dispuestos a ofrecer en el mercado en algún período específico. Cuanto mayor es el precio, mayor será la cantidad de productos que la empresa está dispuesta a ofrecer. Al reducirse el precio, se reduce la cantidad ofrecida. Esto nos permite asegurar que la *función de oferta es una función creciente*. Si p representa el precio por unidad y q la cantidad ofrecida correspondiente entonces a la ley que relaciona p y q se la denomina función de oferta y a su gráfica se la conoce como gráfica de oferta.

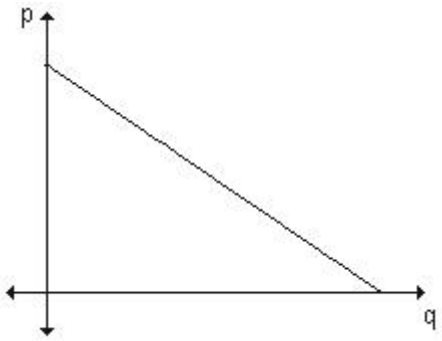


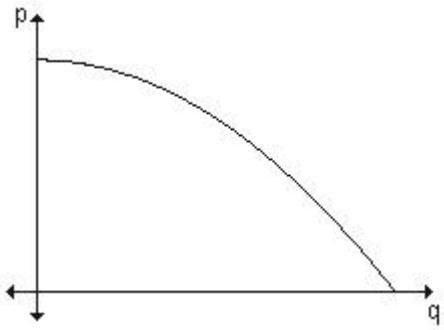


A esta función la simbolizamos $p = 0(q)$ donde sabemos que p es el precio unitario y q la cantidad de productos que, a ese precio, se ofrece en el mercado.

Función de demanda: La empresa utiliza esta función para relacionar la cantidad de productos demandada por los consumidores, con el precio unitario al que se puede vender esa cantidad, de acuerdo con la demanda. En general, si el precio aumenta, se produce una disminución de la cantidad demandada del artículo porque no todos los consumidores están dispuestos a pagar un precio mayor por

adquirirlo. La demanda disminuye al aumentar el precio por eso esta es una función decreciente como lo observamos en los ejemplos gráficos. Podemos asegurar entonces que para cada precio de un producto existe una cantidad correspondiente de ese producto que los consumidores demandan en determinado período. Si el precio por unidad de un producto está dado por p y la cantidad correspondiente en unidades está dada por q la ley que los relaciona se denomina función de demanda. A su gráfica se la llama gráfica de demanda.



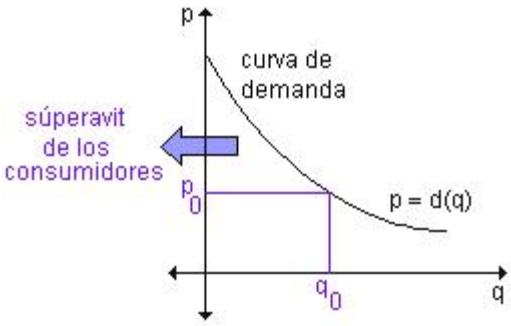


A esta función la simbolizamos $p = d(q)$ donde sabemos que p es el precio unitario y q la cantidad de productos que, a ese precio, se demanda en el mercado.

SUPERAVIT DE CONSUMIDORES Y PRODUCTORES

El mercado determina el precio al que un producto se vende. El punto de intersección de la curva de la demanda y de la curva de la oferta para un producto da el precio de equilibrio. En el precio de equilibrio, los consumidores comprarán la misma cantidad del producto que los fabricantes quieren vender. Sin embargo, algunos consumidores aceptarán gastar más en un artículo que el precio de equilibrio. El total de las diferencias entre el precio de equilibrio del artículo y los mayores precios que todas esas personas aceptan pagar se considera como un ahorro de esas personas y se llama el superávit de los consumidores.

El área bajo la curva de demanda es la cantidad total que los consumidores están dispuestos a pagar por q_0 artículos. El área sombreada bajo la recta $y = p_0$ muestra la cantidad total que los consumidores realmente gastarán en el precio p_0 de equilibrio. El área entre la curva y la recta representa el superávit de los consumidores.

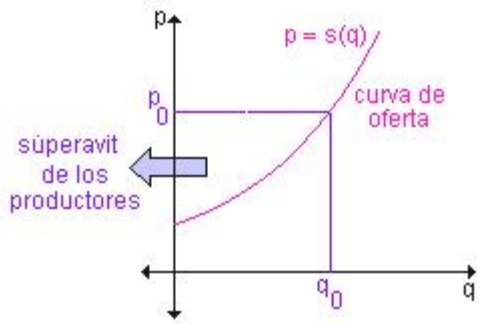


El superávit de los consumidores está dado por el área entre las curvas $p = d(q)$ y $p = p_0$ entonces su valor puede encontrarse con una integral definida de esta forma: $\int_0^{q_0} (d(q) - p_0)\, dq$ donde $d(q)$ es una función demanda con precio de equilibrio p_0 y demanda de equilibrio q_0.

Ejercicio 1. La curva de demanda está dada por la ley $d(x) = 50 - 0{,}06x^2$. Encuentre el superávit o ganancia de los consumidores si el nivel de venta asciende a veinte unidades.

Solución: Como la cantidad de unidades es 20, su precio asciende a $p = d(20) = 50 - 0{,}06(20)^2 = 26$. Resolviendo la integral, la ganancia de los consumidores resulta: $\int_0^{20} (50 - 0{,}06x^2 - 26)\, dx$ que es igual a: $\int_0^{20} (24 - 0{,}06x^2)\, dx = 24x - 0{,}06x^3 \Big|_0^{20} = 320.$ De ahí que la ganancia de los consumidores asciende a $ 320 si el nivel de venta asciende a veinte unidades.

De la misma manera si algunos fabricantes estuviesen dispuestos a proporcionar un producto a un menor precio que el precio p_0 de equilibrio, el total de las diferencias entre el precio de equilibrio y los precios más bajos a los que los fabricantes venderían el producto se considera como una entrada adicional para los fabricantes y se llama *el superávit de los productores*.



El área total bajo la curva de oferta entre $q=0$ y $q=q_0$ es la cantidad mínima total que los fabricantes están dispuestos a obtener por la venta de q_0 artículos. El área total bajo la recta $p=p_0$ es la cantidad realmente obtenida. La diferencia entre esas dos áreas, el superávit de los productores, también está dada por una integral definida.

Definición: Si $s(q)$ es una función de oferta con precio p_0 de equilibrio y oferta q_0 de equilibrio, entonces superávit de los productores es igual a: $\int_0^{q_0} (p_0 - s(q))\, dq$

Ejemplo 1: Se conoce que la curva de la oferta para un producto es $s(x)=\frac{x}{2}+7.$ Encuentre la ganancia de los productores si la producción asciende a diez artículos.

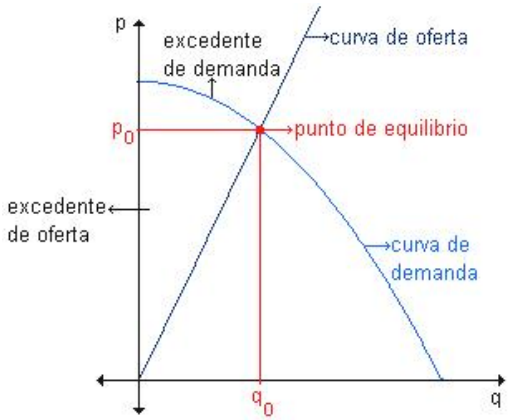
Solución: Si la producción asciende a 10 artículos el precio es $s(10)=\frac{10}{2}+7=12$ pesos. La ganancia o superávit de los productores se calculó resolviendo: $\int_0^{10}\left(12-\left(\frac{x}{2}+7\right)\right)dx=\int_0^{10}\left(5-\frac{x}{2}\right)dx=5x-\frac{x^2}{4}\Big|_0^{10}=25$ De ahí que la ganancia de los productores asciende a $25 si la producción es de diez artículos.

Ejemplo 2: Calcule el exceso de oferta y el exceso de demanda para las curvas de demanda y oferta dadas.

Función de demanda: $p_1(q)=1000-0{,}4q^2.$

Función de oferta: $p_2(q)=42q.$

Solución: El exceso de oferta y el de demanda están representados por las áreas que muestra la gráfica:



La oferta coincide con la demanda en (q_0, p_0), es decir: $p_1(q) = p_2(q) \Rightarrow 1000 - 0{,}4q^2 = 42q \Rightarrow 0{,}4q^2 - 42q + 1000 = 0 \Rightarrow q_1 = -125 \wedge q_2 = 20$. Como los valores de las abscisas corresponde a número de artículos ofrecidos o demandados, $q_0 = 20$ y, por lo tanto, $p_0 = 840$.

El excedente de demanda o superávit de los consumidores es la región comprendida entre $p_1(q)$ y la recta $p = 840$, entre 0 y 20, o sea: $\int_0^{20} (1000 - 0{,}04q^2 - 840)\, dq = \int_0^{20} (160q - 0{,}4q^2)\, dq = 160q - 0{,}4\frac{q^3}{3}\Big|_0^{20} = 2133{,}33$ de modo que el excedente de demanda asciende a $2133,33. Y así El excedente de oferta es la región comprendida entre las rectas $p = 840$ y $p = 42q$ entre 0 y 20, o sea: $\int_0^{20} (840 - 42q)\, dq = 840q - 21q\Big|_0^{20} = 8400$. Por tanto el superávit de oferta alcanza $8400.

ANÁLISIS MARGINAL

La derivada y, en consecuencia la integral, tienen aplicaciones en administración y economía en la construcción de las ***tasas marginales***. Es importante para los economistas este trabajo con el análisis marginal porque permite calcular el punto de maximización de utilidades.

En el análisis marginal se examinan los efectos incrementales en la rentabilidad. Si una firma está produciendo determinado número de unidades al año, el análisis marginal se ocupa del efecto que se refleja en la utilidad si se produce y se vende una unidad más. Para que este método pueda aplicarse a la maximización de utilidades se deben cumplir las siguientes condiciones:

- Deberá ser posible identificar por separado las funciones de ingreso total y de costo total.
- Las funciones de ingreso y costo deben formularse en términos del nivel de producción o del número de unidades producidas y vendidas.

Algunas definiciones importantes:

Costo marginal: es el costo adicional que se obtiene al producir y vender una unidad más de un producto o servicio. También se puede definir como el valor límite del costo promedio por artículo extra cuando este número de artículos extra tiende a cero. Podemos pensar el costo marginal como el costo promedio por artículo extra cuando se efectúa un cambio muy pequeño en la cantidad producida.

Debemos tener en cuenta que si $c(x)$ es la función costo, el costo promedio de producir x artículos es el costo total dividido por el número de artículos producidos.

Costo promedio por artículo = $\dfrac{c(x)}{x}$

Costo marginal = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta c}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{c(x+\Delta x) - c(x)}{\Delta x}$

Costo marginal = $c'(x) = \dfrac{dc}{dx}$

El costo marginal mide la tasa con que el costo se incrementa con respecto al incremento de la cantidad producida.

Ingreso marginal: es el ingreso adicional que se consigue al vender una unidad más de un producto o servicio. Para una función de ingreso total $r(x)$, la derivada $r'(x)$ *representa la tasa instantánea de cambio en el ingreso total con un cambio del número de unidades vendidas*. Podemos decir que el ingreso marginal representa las entradas adicionales de una empresa por artículo adicional vendido cuando ocurre un incremento muy pequeño en el número de artículos vendidos. Representa la tasa con que crece el ingreso con respecto al incremento del volumen de ventas.

Utilidad marginal que obtiene una empresa está dada por la diferencia entre sus ingresos y sus costos. Si la función de ingreso es $r(x)$ cuando se venden x artículos y si la función de costo es $c(x)$ al producirse esos mismos artículos, la utilidad $p(x)$ obtenida por producir y vender x artículos está dada por $p(x) = r(x) - c(x)$. La derivada $p'(x)$ se denomina *utilidad marginal* y representa la utilidad por artículo si la producción sufre un pequeño incremento.

Ejercicios. Resuelva los siguientes problemas y verifique las respuestas.

1. Una función de costo marginal está definida por $c'(x) = 3x^2 + 8x + 4$ y el costo fijo es de \$6. Determine la función costo total correspondiente. *Respuesta: $c(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 6$*

2. Para un artículo particular, la función de ingreso marginal es $i'(x) = 15 - 4x$. Si x unidades son demandadas cuando el precio por unidad es de p pesos:
   a) Determine la función ingreso total.
   b) Determine la ecuación de demanda. *Respuestas: a) $i(x) = 15x - 2x^2$ b) $p(x) = 15 - 2x$*

Analice los problemas resueltos a continuación.

3. Suponemos que durante los primeros cinco años que un producto se puso a la venta en el mercado la función *f(x)* describe la razón de ventas cuando pasaron x años desde que el producto se presentó en el mercado por primera vez. Se sabe que $f(x) = 2700\sqrt{x} + 900$ sí $0 \le x \le 5$. Calcule las ventas totales durante los primeros cuatro años.

Solución: Debemos plantear Venta total = $\int_0^4 2700\sqrt{x} + 900\,dx = \left(\frac{2700x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 900x \right)\Bigg|_0^4 = 18000$ Las ventas totales durante los primeros cuatro años ascienden a 18000 unidades.

4. Se espera que la compra de una nueva máquina genere un ahorro en los costos de operación. Cuando la máquina tenga x años de uso la razón de ahorro sea de *f(x)* pesos al año donde $f(x) = 1000 + 5000x$.

a) ¿Cuánto se ahorra en costos de operación durante los primeros seis años?

b) Si la máquina se compró a $ 67500 ¿cuánto tiempo tardará la máquina en pagarse por sí sola?

Solución: a) Para conseguir el ahorro durante los primeros seis años calculamos $\int_0^6 1000 + 5000x\,dx = \left(1000x + 2500x^2\right)\Big|_0^6 = 96000.$ Al cabo de seis años el ahorro asciende de $ 96000

b) Dado que el precio de compra es de $ 67500, el número de años de uso que se requieren para que la máquina se pague sola es n, entonces $\int_0^n 1000 + 5000x\,dx = 67500.$ *ya que* $\left[1000 + 2500x^2\right]_0^n = 67500$

$1000n + 2500n^2 = 67500 \Rightarrow 2500n^2 + 1000n - 67500 = 0$ y como $5n^2 + 2n - 135 = 0$

Hallamos los valores de n aplicando la resolvente y resulta n_1 = -5,4 (imposible para nuestro problema) y además n_2 = 5. Se tardarán 5 años para que la máquina se pague sola.

Bibliografía:

Este material ha sido consultado y resumido de la bibliografía anexa la cual puede consultar como ayuda para profundizar en su curso:

- Jaramillo Betancur, Fernando. Matemática Financiera y su uso para las decisiones en un entorno internacional. 1ª Edición. Universidad de Antioquia. 2005.
- Jaramillo Vallejo, Felipe. Matemáticas Financieras Básicas Aplicadas. 1ª Edición. Alfaomega. 2004
- Ramírez C. et all. (2009). Fundamentos de matemáticas financieras. Centro de investigaciones. Universidad Libre Cartagena.
- Mora Zambrano, Armando. Matemáticas Financieras. 2ª Edición. Alfaomega. 2007.

- Navarro, E & Nave, J. Fundamentos de Matemáticas Financieras. 1ª Edición. A.Bosch. 2001.
- Portus Govinden, Lyncoyan. Matemáticas Financieras. 4ª Edición. Mc Graw Hill. 2008.
- Riggs, James L & Otros. Ingeniería Económica. 4ª Edición. Alfaomega. 2002
- Ruíz, Héctor Alfonso. Matemáticas Financieras. 2ª Edición. Universidad Santo Tomás. 1998
- Sánchez Vega, Jorge E. Manual de Matemáticas financieras. 1ª Edición. Ecoe.1997