Aplicaciones de la derivada a la administración

Análisis marginal

El Cálculo Diferencial estudia los cambios que ocurren en una expresión matemática, cuando ocurren variaciones en otras cantidades (variables independientes) de las cuales depende la cantidad original (variable dependiente), por ejemplo:

- El cambio en el costo total de operación de una empresa, resulta de cada unidad adicional producida.
- El cambio de la demanda de cierto producto que resulta de un incremento de una unidad en el precio.
- El cambio del producto nacional bruto de un país por cada año que pasa

La derivada tiene varias aplicaciones en la economía y la administración entre ellas “tasas marginales”.

Función de costo

Determina la inversión realizada para producir un bien o artículo. Se define $\boldsymbol{C(x) = C_f + C_v}$ donde C_f representa los costos fijos y C_v los costos variables.

Costo marginal

Es la variación del costo total ante el aumento de una unidad producida, es decir el costo de producir una unidad adicional. El costo marginal se utiliza para determinar la *cantidad de producción* de una empresa y los *precios de los productos*. El costo marginal es la derivada de la función de costo con respecto a la cantidad producida.

$$\boxed{Costo\ marginal = \frac{dC}{dx}}$$

El costo marginal mide la tasa con la que el costo se incrementa con respecto al incremento de la cantidad producida.

Costo promedio marginal

Costo promedio o coste unitario, es el costo de producción por unidad de producto. Se determina dividiendo el total de costos fijos y costos variables para el número total de unidades producidas.

$$\boxed{costo\ promedio = \frac{C(x)}{x}}$$

Mientras que el costo promedio marginal es igual a la derivada del costo promedio

$$\boxed{costo\ promedio\ marginal = \frac{d}{dx}C(x)}$$

Función de Ingreso

Es la cantidad en dinero que recibe la empresa por venta de servicios o productos, se define por

$$\boxed{\boldsymbol{I = C(x) \cdot x}}$$

Donde *C(x)* es la función de costos de producción y *x* la cantidad producida en unidades. Esta ecuación también suele escribirse como $I = p.x$ donde p es el precio o coste de producción y x es la cantidad producida.

Ingreso marginal

Es el cambio que se realiza en el ingreso total por cada unidad adicional que se vende. De ahí que: $ingreso\ marginal = \frac{d}{dx}I$. Los ingresos marginales representan las entradas adicionales de una empresa por artículo adicional vendido cuando ocurre un incremento muy pequeño en el número de artículos vendidos. Esto es, la tasa con que crece el ingreso con respecto al volumen de ventas.

Función de Utilidad

Desde el punto de vista económico $utilidad = ingresos - costos,$ se nota como:

$$\boxed{\boldsymbol{U(x) = I(x) - C(x)}}$$

Utilidad marginal

Utilidad marginal, brinda el consumo de un bien adicional; en términos matemáticos se puede decir que la Utilidad Marginal, es la derivada parcial de la función de la Utilidad con respecto a la cantidad consumida de un bien. La Utilidad, desde el punto de vista contextual, se puede decir que es la aptitud de un bien o servicio para satisfacer la necesidad humana.

$$utilidad\ marginal = \frac{d}{dx}U$$

La utilidad marginal, representa la utilidad adicional por artículo, si la producción tiene un pequeño incremento.

Razón de Cambio Relativo y Porcentual

Cambio relativo, si tenemos una magnitud *R(x)*, con respecto a *x*, se define como el cociente $cambio\ relativo = \frac{cambio\ Q}{tamaño\ de\ Q}$,

$razón\ relativa\ de\ cambio = \frac{\frac{d}{dx}Q}{Q}$; y la

$$razón\ porcentual\ de\ cambio = \frac{100 \cdot \frac{d}{dx}Q}{Q}$$

Razón de tasa de cambio

La segunda derivada permite medir la eficacia de una persona al realizar una actividad. Esta derivada proporciona la razón de cambio de la tasa de cambio de la función original**.** Esto es, basta con calcular la segunda derivada

$$razón\ de\ cambio\ de\ tasa = f'(x) - f''(x)$$

Función de consumo

La función del consumo *(C)* es la relación entre el nivel de gasto de consumo y el nivel de renta personal disponible. *C= f (I)* existe una relación con el ingreso total *I*, y el consumo *C*. Tanto el Ingreso como el consumo suelen expresarse en miles de millones de dólares.

La *propensión marginal al consumo*, es la razón de cambio del consumo respecto al ingreso:

$$propensión\ marginal\ al\ consumo = \frac{dC}{dI}.$$

La diferencia entre el Ingreso *(I)* y el Consumo *(C)* es el **Ahorro *(S)***,

$$\boldsymbol{S} = I - C$$

Si derivamos ambos miembros de la ecuación con respecto a I, tenemos

$$\frac{dS}{dI} = \frac{d}{dI}(I) - \frac{d}{dI}(C) = 1 - \frac{dC}{dI}$$

Se define $\frac{dS}{dI}$ como la *propensión marginal al Ahorro*, indicando que el *Ahorro* cambia muy rápidamente con respecto al *Ingreso.*

$$propension\ marginal\ al\ ahorro = 1 - propensión\ margial\ al\ consumo$$

Para recordar:

Costo marginal: $C'(x) = \frac{d}{dx}(x)$ *Costo promedio:* $\overline{C(x)} = \frac{C(x)}{x}$ *Ingreso:* $I(x) = x \cdot p$

Utilidad: $U(x) = I(x) - C(x)$ $x = número\ de\ unidades$ $p = precio/demanda$

Cuando se indique la palabra *"marginal"* se refiere a calcular una derivada.

Ejercicios resueltos de aplicación

1. El producto Interno Bruto (PIB) de un país está dado por la expresión $R(x) = x^2 + 5x + 106$ millones de dólares t años después de 2019.
   a. ¿Qué razón cambió PIB con respecto al tiempo en 2022?
   b. ¿A qué razón porcentual cambio el PIB con respecto al tiempo en el año 2024

Respuestas

Parte a

Como $R(x) = x^2 + 5x + 106$ *derivamos:* $R'(x) = 2x + 5$, *como* $t = 13$ *evaluamos en la derivada:* $R'(13) = 2(13) + 5 = 31000$ *millones de dólares al año.*

Parte b

$R(x) = x^2 + 5x + 106$ *como* $t = 13$ *evaluamos en* $R(x)$,

$R(13) = (13)^2 + 5(13) + 106 = 340.000$ *millones de dólares. De ahí que, la razón de cambio porcentual sea:* $100 \cdot \frac{R'(13)}{r(13)} = 100 \cdot \frac{106}{340} = 31,17\%$

2. En cierta empresa un estudio de eficiencia para el turno de la mañana, determina que un trabajador promedio, que llega a las 7:00 am., ha producido $Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 24t$.
   a. Calcular la tasa de producción del trabajador a las 12:00.

b. ¿A qué razón está cambiando la tasa de producción del trabajador con respecto a las 12:00?

Respuestas:

Literal a

$$Q'(t) = -3t^2 + 12t + 24$$

$$Q'(5) = -3(5)^2 + 12(5) + 24 = 159 unidades - por - hora$$

Literal b

La razón de cambio de la tasa de producción es la segunda derivada

$$Q''(t) = -6t + 12$$

$$Q''(5) = -6(5) + 12 = -28 unidades - por - hora$$

El signo negativo indica que la tasa de producción está decreciendo.

3. Encuentre los costos marginales si $C(x) = \sqrt{100 + x^2}$

$$(100 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$C'(x) = \frac{d}{dx}(\boldsymbol{x})$$

$$C'(x) = \frac{1}{\cancel{2}}(100 + x^2)^{-\frac{1}{2}} * \cancel{2}x$$

$$C'(x) = x * (100 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$C'(x) = \frac{x}{(100 + x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$x = 200\ unidades$$

$$C'(200) = \frac{200}{(100 + 200^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$C'(200) = \frac{200}{225} = \$0.99$$

4. Determine el $C(\bar{x})$ costo promedio marginal

$$C(x) = 20 + 2x - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$C(\bar{x}) = \frac{20 + 2x - \sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

$$C(\bar{x}) = \frac{20}{x} + \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} - \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

$$C(\bar{x}) = \frac{20}{x} + 2 - \frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{x}$$

$$C(\bar{x}) = \frac{d}{dx}\frac{20}{x} + \frac{d}{dx}2 - \frac{d}{dx}\frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{x}$$

$$C(\bar{x}) = \frac{d}{dx}\frac{20}{x} + \frac{d}{dx}2 - \frac{d}{dx}\frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{x}$$

$$C(\bar{x}) = -\frac{20}{x^2} - \frac{1}{x^2(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$C(\bar{x}) = \frac{-20(x^2+1)^{\frac{1}{2}}+1}{x^2} - \frac{1}{x^2(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

5. Determinar el valor de ingreso marginal si la relación en la demanda es

$\boldsymbol{p = \sqrt{100 - 0.1x - 10x^2}}$

$\boldsymbol{I(x) = x * p}$

$I(x) = x(100 - 0.1x - 10x^2)^{\frac{1}{2}}$

$I(x) = \frac{d}{dx}x * (100 - 0.1x - 10x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{d}{dx}(100 - 0.1x - 10x^2)^{\frac{1}{2}} * x$

$I(x) = 1 * (100 - 0.1x - 10x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{0.1x + 20x^2}{2(100 - 0.1x - 10x^2)^{\frac{1}{2}}}$

$I(x) = \frac{2(100 - 0.1x - 10x^2) - 0.1x - 20x^2}{2(100 - 0.1x - 10x^2)^{\frac{1}{2}}}$

$$I(x) = \frac{200 - 0.3x - 40x^2}{2(100 - 0.1x - 10x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

6. Determine el costo marginal si la función del costo es $C(x) = \sqrt{25 + x + \ln{(x + 1)}}$

$\boldsymbol{C(x)} = \left(25 + x + Ln(x + 1)\right)^{\frac{1}{2}}$

$C(x) = \frac{1}{2}(25 + x + Ln(x + 1))^{-\frac{1}{2}} * \frac{d}{dx}(25 + x + Ln(x + 1))$

$C(x) = \frac{1}{2}(25 + x + Ln(x + 1))^{-\frac{1}{2}} * \frac{x + 2}{x + 1}$

$C(x) = \frac{1}{2}(25 + x + Ln(x + 1))^{-\frac{1}{2}} * \frac{x + 2}{x + 1}$

$C(x) = \frac{x + 2}{2(x + 1)(25 + x + Ln(x + 1)^{\frac{1}{2}}}$

7. Determine la utilidad marginal si el costo es $C(x) = 400 + x^2$

$\boldsymbol{p = 300 - 2x}$

$\boldsymbol{I(x) = x * p}$

$I(x) = x(300 - 2x)$

$I(x) = 300x - 2x^2$

$U(x) = 300x - 2x^2 - 4000 + x^2$

$U(x) = 3x^2 + 300x + 4000$

$U(x) = -6x + 3$

8. Determinar la Utilidad, si la ecuación en la demanda y el costo de cierto artículo es:

$\boldsymbol{p + 0.1x = 80}$

$\boldsymbol{C(x) = 5000 + 20x}$

$\boldsymbol{p = 80 - 0.1x}$

$\boldsymbol{I = p(x)}$

$I = (80 - 0.1)x$

$I = 80x - 0.1x^2$

$U = 80x - 0.1x^2 - 5000 - 20x$

$U = -0.1x^2 + 60x - 5000$

$U = 0.2x + 60$

$U = 0.2(150) + 60 = \$30$

$U = 0.2(400) + 60 = \$ - 2$

9. Determinar las propensiones marginales al Consumo y al Ahorro, cuando I= 100. La función del Consumo está dada por:

$$C = \frac{4\left(3\sqrt{I^3}+3\right)}{I+10}$$

$$C'' = 4\left[\frac{\frac{d}{dI}2I^{\frac{3}{2}}(I+10) - \frac{d}{dI}(I+10)*\left(2I^{\frac{3}{2}}\right)}{(I+10)^2}\right] = 4\left[\frac{\left(2*\frac{3}{2}I^{\frac{1}{2}}\right)(I+10)-1*\left(2I^{\frac{3}{2}}\right)}{(I+10)^2}\right]$$

$$C = 4\left[\frac{\left(3I^{\frac{1}{2}}\right)(I+10)-1*\left(2I^{\frac{3}{2}}\right)}{(I+10)^2}\right] = 4*\frac{3\sqrt{I}(I+10)-2\sqrt{I^3}}{(I+10)^2}$$

$$C = 4\left(\frac{1297}{12100}\right) = 0.428$$

La propensión marginal al ahorro, cuando I=100, es 1- 0.428= 0.572 Esto quiere decir que la nación consume aproximadamente un42.8% y ahorra 57.2%.

10. Para cierto artículo la ecuación de la demanda es $p = 5 - 0{,}001x$. Determine el volumen de producción para maximizar el Ingreso, si el costo de producir los artículos que se venden es $C(x) = 200 + x$. Calcular las unidades para que la utilidad sea máxima y determine el valor de dicha utilidad.

I= xp

$$I = x(5-0.001x)$$
$$I = 5x - 0.001x^2$$
$$I' = 5 - 0.002x$$
$$5 - 0.002x = 0$$
$$x = \frac{5}{0.002} = 2500und.$$

Para determinar si este volumen de producción maximiza el ingreso avaluamos la segunda derivada, (si es mayor que cero será máximo, si es menor que cero es mínimo y si es igual a cero existe un punto de inflexión).

$$I' = 5 - 0.002x$$
$$I'' = -0.002$$

Significa que el volumen de producción maximiza el ingreso.

Para resolver la segunda pregunta: la tasa de producción o número de unidades que debe producir la empresa para obtener la utilidad máxima, se realiza:

$$U = I - C$$
$$U = 5x - 0.001x^2 - (2000 + x)$$
$$U = 5x - 0.001x^2 - 2000 - x$$
$$U = -0.001x^2 - 4x - 2000$$
$$U' = -0.002x - 4$$
$$-0.002x - 4 = 0$$
$$x = \frac{4}{0.002} = 2000und.$$

$U' = -0.002x - 4$

$U'' = -0.002 \max imiza$

El valor de la Utilidad máxima:

$U = 5x - 0.001x^2 - 2000 - x$

$U_{(2000)} = 5(2000) - 0.0001(2000)^2 - 2000$

$U_{(2000)} = 10000 - 400 - 2000 = \$7600$

Ejercicios propuestos

1. Un estudio de eficiencia en una empresa determina que el trabajador promedio que llega a trabajar a las 7:00 a.m., habrá producido $Q(t) = -2t^3 + 8t^2 + 17t$ unidades diarias.

   a. Calcular la tasa de producción del trabajador a las 10:00 a.m.
   b. ¿A qué razón cambia la tasa del trabajador a las 10:00 a.m.?
   c. Estime el cambio de la tasa entre las 10:00 y las 10:30 a.m.
   d. Calcule el cambio real en la tasa de producción del trabajador entre las 10:00 y 10:30 a.m.

2. Se proyecta que dentro de "t", tiempo en meses, el precio medio por unidad de artículos en cierto sector de la economía será $Q(t) = -2t^3 + 8t^2 + 17t + 300$ dólares.

   a. ¿*A* qué tasa se incrementará el precio por unidad con respecto a un tiempo de 6 meses?
   b. ¿A qué tasa cambiará el incremento de la tasa de precios con respecto al tiempo de 6 meses?
   c. Calcular el incremento real de la tasa de precios durante el sexto mes.

3. Calcular el costo marginal y costo promedio marginal de las siguientes funciones de costo.

   a $C(x) = \sqrt{120 + x^2}$

   b $C(x) = 5 - \dfrac{42}{x} + 2x^2$

   c $C(x) = 28 - 3x + \sqrt{x + 2}$

   d $C(x) = 250x - 5000 + 10^{-3}x^2$

4. Una empresa vende todas sus unidades producidas a una razón de 5 dólares cada una. El costo total por producir estas unidades está determinado por la función $C(x) = 30 + 1.4x + 0.002x^2$

   a. Escriba la función de utilidad.

   b. Determine el volumen de producción para obtener la utilidad máxima

   c**.** Cuál es el costo de la producción para obtener esta utilidad.

5. Para un artículo determinado, la ecuación de la demanda es $p = 6 - 0.002x$, ¿Qué valor de x maximiza el ingreso, si la función de costo es $C(x) = x + 3200$? Encuentre el valor que maximice la utilidad y calcule dicha utilidad.

6. Para las siguientes funciones de costo y relaciones de la demanda, determine la utilidad marginal de cada expresión:

   a $C(x) = 1500 + 9x, \qquad p = 100 - \frac{1}{2}x$

   b $C(x) = 3000 - x, \qquad p = -3x + 300$

   c $C(x) = x + \sqrt{100}, \qquad p = c - 10\left(\frac{h}{x}\right) + x$

7. EL costo de producir x, miles de unidades está dada por la función $C(x) = 2700 + 8x - 4x^2 + 2x^3$. Determine el costo marginal y el costo marginal promedio.

8. La relación de la demanda de cierto producto, son las siguientes, x son las unidades que pueden venderse a un precio determinado de cada unidad, determinar el ingreso marginal cuando:

   a. $p = 50e^{\frac{-x}{20}}$ b. $p = 330 - ln(x + 1)$

9. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x$ cuando $x = 3$.

10. Determine el costo promedio marginal y su valor, dados por x.

$$\overline{C} = \frac{6000e^{\frac{x}{600}}}{x}; \; x = 350. \; x = 700$$

$$\overline{C} = \frac{850}{x} + 3000\frac{e^{\frac{2x+6}{700}}}{x} \; x = 97 \; x = 197$$

11. Un fabricante de radiorreceptores determina que su ecuación de la demanda semanal es $5x = 375 - 2x$, el costo de producción es $400 + 13x + \frac{x^2}{4}$ (dólares). Determine el volumen de producción que debe causar para obtener una utilidad máxima.

12. Una empresa que produce calcetines y los empaca en cajas, desea saber cuál será el número de cajas que deben preparar para minimizar el costo promedio por caja. Determine el costo promedio mínimo (con dos decimales), si el costo total de producir x cajas es $C(x) = 3x^2 + 50x - 17xln\, x + 120$.

13. La función del costo de fabricar un producto está dada por $C(x) = 10 + 23x + \frac{5}{3}x^3$ y la demanda del producto $p = 2750 - 4x$, se grava con un impuesto $220 por cada unidad producida, donde el fabricante añade al costo de producción. Determine el nivel de producción (después de creado el impuesto) necesario para maximizar la Utilidad.

14. Una empresa de televisión por cable tiene actualmente 100,000 suscriptores, que pagan mensualmente una cuota de $35. Una encuesta revelo que tendrían 1000suscriptores más por cada $0.25 de disminución de cuota. ¿Para qué cuotas se obtendrá un ingreso máximo y cuantos suscriptores se tendían entonces?

15. Una empresa determina que su ingreso total se determina por $I(x) = 760000 - x^2 + 1000x$

Encontrar:

a. El número de artículos vendidos para maximizar el ingreso total.

b. ¿Cuál es el monto de este ingreso total?

c. Si se venden 1200 artículos cual será el ingreso total.

16. Una compañía determina que puede vender todas sus unidades a que produce a €2 cada una. Se estima que la función del costo de producción (en euros) es de $C(x) = 1000 + \frac{x}{5000}$ .Encuentre :

a. La función de Utilidad.

b. El volumen de producción que se debe obtener para alcanzar la utilidad máxima.

c. Monto del volumen máximo.

Referentes bibliográficos

Arya, J. & Lardner, R. (2009). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía*. Pearson Educación, México. Quinta edición.

Cuéllar, C. Juan Antonio. (2014). *Matemáticas*. V.DGB. McGrawHill, México. Segunda edición

Haeussler, F. (2003). *Matemáticas para administración y economía*. Pearson Educación, México. Décima edición.

Jara, M. (2016). A*plicaciones de la derivada en economía y administración.* Ed. ECOTEC. Samborondón - Ecuador

Marvin L. (2002). *Cálculo para Ciencias Económico-Administrativas*. Pearson Educación.