Prof. Enrique Mateus-Nieves
Post-PhD in Advanced Mathematics

Taller general matrices

1. Sea A una matriz de dimensión 3x 3 y suponga que $|A| = 2$. Calcule:

   a. $\lceil 3A \rceil$ b. $|3A^{-1}|$ c. $(|3A|^{-1})$

2. Para que valores de a es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 3a & 0 \\ -2 & a & 2 \end{vmatrix} = 14?$$

3. Determine todos los valores de a para los que la matriz sea singular

$$\begin{bmatrix} a^2 & 0 & 3 \\ 5 & a & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Dadas las siguientes matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, siguiendo el debido proceso, encuentre:

   a. $2A + 3B$ b. $-A \cdot B$ c. $-A^T + 2B$

   d. $(-3B + B^T)$ e. $(-4B - 5A)^T$ f. $A^3 - B^2$

5. Realice las operaciones indicadas, cuando $k = -2,\ \ \rho = 2,\ \ \tau = -1$ y las matrices
$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -8 \\ -1 & -9 \end{bmatrix}$

   a. $-A + kA =$ b. $\rho A + (\tau B)^T =$ c. $(-A^T + \tau B) + \rho A$

   d. $(-\rho B + kB^T)$ e. $(-kB - \rho A)^T =$ f. $kA^3 - (\rho B)^2 =$

6. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ comprobar que
   $(A + B)^T = A^T + B^T$ b. $(2A)^T = 2A^T$

7. Dadas las siguientes matrices indique si tienen inversa, en caso contrario indique por qué no la tiene.

a. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ c. $C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 7 & 7 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

$d.$ $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 20 \\ -3 & 10 & -2 \end{bmatrix}$ e. $E = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ f. $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$g.$ $G = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ h. $H = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$ i. $I = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

j. $J = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ k. $K = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -4 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

8. Resolver los sistemas lineales siguiente por medio de la regla de Cramer o por el método de Gasuus-Jordan

a. $A = \begin{cases} 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -3 \end{cases}$ b. $B = \begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x + y - 3z = 8 \\ x - 2y + 3z = -5 \end{cases}$ c. $R = \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 0 \\ \end{cases}$

d. $H = \begin{cases} 2x + 4y + z = 8 \\ x - y - z = -1 \\ 3x - 8y + z = -12 \end{cases}$ r. $M = \begin{cases} x + z = -2 \\ -5y - 10z = 100 \\ -x - y + z = 30 \end{cases}$ f. $T = \begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ 2x - 3y = -9 \end{cases}$

g. W= $\begin{cases} 4x + 6y = 2 \\ 6x + 5y = 1 \end{cases}$ h. G= $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ -6x + 12y = 1 \end{cases}$ i. L= $\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ -6x + 12y = 1 \end{cases}$

9. Indique si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes: justifique sus respuestas:

a. $det(A \cdot A^T) = \det(A^2)$
b. $\det(-A) = -\det A$
c. Si $A^T = A^{-1}$, entonces $det(A) = 1$

10. Calcule en cada caso la matriz B que verifica la igualdad

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

b. $2A = 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} - 3\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

11. Encuentre la matriz M tal que $M - B^2 = A \cdot B$, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. Las exportaciones, en millones de euros, de tres países A, B y C a otros tres, X, Y y Z en los años 2021 y 2022 vienen dadas por las matrices:

$$A_{2021} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 11 & 6'7 & 0'5 \\ 14'5 & 10 & 1'2 \\ 20'9 & 3'2 & 2'3 \end{pmatrix} \end{array} \quad A_{2022} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 13'3 & 7 & 1 \\ 15'7 & 11'1 & 3'2 \\ 21 & 0'2 & 4'3 \end{pmatrix} \end{array}$$

a. Calcule y exprese en forma de matriz el total de exportaciones para los dos años.
b. Cuántos millones ha exportado el país B al país Z en total.
c. Calcule el incremento de las exportaciones del año 2021 al 2022.

13. Demuestre que $(N^{-1})^{-1} = N$ para la siguiente matriz: $N = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. ¿Se cumple esto para todas las matrices de orden $2\ x\ 2$? Justifique su respuesta.

14. Demuestre si la inversa de la inversa de una matriz es siempre la misma matriz. En caso contrario demuestre por contra ejemplo.

15. Use el método de matriz inversa para resolver los siguientes ejercicios

a. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -5 \\ 2x_1 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 = -3 \end{cases}$

Referentes bibliográficos

1. Grossman S, Flores J. (2012). *Álgebra Lineal*, Séptima edición. Mc Graw Hill.
2. Poole, D. (2011.) *Álgebra Lineal. Una Introducción Moderna.* Cengage.
3. Larson, L. (2015). *Fundamentos de Álgebra Lineal.* Versión Revisada. Cengage.