Espacios vectoriales

Un *espacio vectorial* (también llamado *espacio lineal)* es una estructura algebraica creada a partir de un conjunto V, no vacío; una o*peración interna* llamada *suma*, definida para los elementos del conjunto; y una *operación externa* llamada *producto por un escalar*, definida entre dicho conjunto y otro conjunto, con estructura de cuerpo, que satisface 10 propiedades fundamentales.

Definición: Sea V un conjunto sobre el cual se definen dos operaciones, llamadas *suma* y *multiplicación por un escalar*. Si u y v están en V, la *suma* de u y v se denota mediante $u + v$, y si c es un escalar, el *múltiplo escalar* de u por c se denota mediante cu.

Si los siguientes axiomas se cumplen para todos u, v, y w en V y para todos los escalares c y d, entonces V se llama *espacio vectorial* y sus elementos se llaman *vectores*.

Propiedades	**Nombre**
1. $u + v$ está en V	Cerradura bajo la suma
2. $u + v = v + u$	Conmutatividad
3. $(u + v) + w = u + (v + w)$	Asociatividad
4. $u + 0 = u$.	Existe un elemento 0 en V, llamado *vector cero*
5. $u + (-u) = 0$	Para cada u en V, existe un elemento $-u$ en V
6. cu está en V	Cerradura bajo multiplicación escalar
7. $c(u + v) = cu + cv$	Distributividad
8. $(c + d)u = cu + du$	Distributividad
9. $c(du) = (cd)u$	
10. $1u = u$	

Si $a \cdot u = 0 \rightarrow a = 0, \vee \ u = 0$ de esta situación tenemos: si $a = 0$, es cierto. Si $a \neq 0$, entonces:

$$\exists! \ a^{-1} \in V: a^{-1} \cdot a = 1 \rightarrow u = 1u = (a^{-1} \cdot a)u = a^{-1}(au) = a^{-1}0 = 0 \rightarrow u = 0.$$

Esto se nota: $-au = -(au)$.

Se debe considerar que $-au = (-a)u = a(-u)$, por lo que:

- Si $au + a(-u) = a(u - u) = a0 = 0 \rightarrow a(-u) = -au$
- Si $au + (-a)u = (a - a)u = 0u = 0 \rightarrow (-a)u = -au$

Por “escalares” se entenderá que se trata de números reales, lo que nos debe llevar a referirnos a V como a un *espacio vectorial real* (o un *espacio vectorial sobre los números reales*). En este curso los ejemplos serán espacios vectoriales reales, de modo que se omitirá el adjetivo “real”. Solo nos referiremos como “espacio vectorial”.

A continuación, se presentan ejemplos de espacios vectoriales. En cada caso, es necesario especificar el conjunto V, las operaciones suma y multiplicación por un escalar y verificar las 10 propiedades. Es necesario poner particular atención a las número 1 y 6 (cerradura), 4 (la existencia de un vector cero en V) y la 5 (cada vector en V debe tener un negativo en V).

Ejemplo 1, Probar que $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
Para probarlo asumimos que $\mathbb{R}^2 = V$ y $\mathbb{R} = K$. Los elementos $u \in V = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\, x\, \mathbb{R}$, que de forma genérica es de la forma $u = \langle u_x, u_y\rangle$, en otras palabras, son pares de números reales. El vector u se expresó en sus coordenadas vectoriales u_x, u_y que denominan sus componentes en los ejes x, y del plano respectivamente.
Definimos la operación suma en V así:

Suma +: $\quad V\, x\, V \;\rightarrow\; V$

$(u, v) \;\rightarrow w = u + v$

Donde $u = \langle u_x, u_y\rangle$; $v = \langle v_x, v_y\rangle$; $w = \langle w_x, w_y\rangle$ y la suma entre u y v se define:

$$u + v = \langle u_x, u_y\rangle + \langle v_x, v_y\rangle = \langle u_x + v_x, u_y + v_y\rangle = \langle w_x, w_y\rangle = w$$

Donde $w_x = u_x + v_x$ y $w_y = u_y + v_y$ que implica que la suma de los vectores u y v es interna y esta bien definida.

Ahora veamos si la operación suma cumple las propiedades:

1. Debe ser conmutativa, esto es: $u + v = v + u, \forall\, u, v \in V$. veamos:

   $u + v = v + u$
   $\langle u_x, u_y\rangle + \langle v_x, v_y\rangle = u + v$
   $\langle u_x + v_x, u_y + v_y\rangle = u + v$
   $\langle v_x + u, v_y + u_y\rangle = v + u$
   $\langle v_x, v_y\rangle + \langle u_x, u_y\rangle = v + u$
   $u + v = v + u$. se cumple.

2. Debe ser asociativa
   $(u + v) + w = u + (v + w)$
   $\big(\langle u_x, u_y\rangle + \langle v_x, v_y\rangle\big) + \langle w_x, w_y\rangle = \langle u_x, u_y\rangle + \big(\langle v_x, v_y\rangle + \langle w_x, w_y\rangle\big)$
   $\big(u_x + v_x, u_y + v_y\big) + \langle w_x, w_y\rangle = \langle u_x, u_y\rangle + \big(v_x + w_x, v_y + w_y\big)$
   $\big(u_x + v_x + w_x, u_y + v_y + w_y\big) = \big(u_x + v_x + w_x, u_y + v_y + w_y\big)$ se cumple.

3. Debe tener elemento neutro (0)
   $u + 0 = u.$
   $\langle u_x, u_y\rangle + \langle 0_x, 0_y\rangle = \langle u_x + 0_x, u_y + 0_y\rangle = \langle u_x, u_y\rangle$. Se cumple.

4. Debe tener elemento opuesto
   $u = \langle u_x, u_y\rangle$ por tanto $-u = \langle -u_x, -u_y\rangle$ de donde
   $u + (-u) = \langle u_x, u_y\rangle + \langle -u_x, -u_y\rangle$ =$\langle u_x + (-u)_x, u_y + (-u)_y\rangle = \langle 0_x, 0_y\rangle = 0$. Se cumple.

La operación producto por un escalar definida por:

Producto $\cdot$: $K \, x \, V \; \rightarrow \; V$
$(a, u) \; \rightarrow v = a \cdot u$

El producto de $a \cdot u$ se define: $a \cdot u = a \cdot \langle u_x, u_y \rangle = \left(a \cdot u_x, a u_y\right) = \langle v_x, v_y \rangle = v$ donde: $v_x = a \cdot u_x$ y $v_y = a \cdot u_y$ lo que implica que la multiplicación del vector u por el escalar a es externa y está bien definida.

5. Que esta operación cumpla la operación asociativa

   $\forall \, a, b \; \in K$, y $\forall \, u \in V$, $a \cdot (b \cdot u) = (a \cdot b)u$.

   Esto es:

$$a \cdot (b \cdot \mathbf{u}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{u}$$
$$a \cdot \left(b \cdot (u_x, u_y)\right) = (a \cdot b) \cdot (u_x, u_y)$$
$$a \cdot (b \cdot u_x, b \cdot u_y) = (a \cdot b) \cdot (u_x, u_y)$$
$$(a \cdot b \cdot u_x, a \cdot b \cdot u_y) = (a \cdot b \cdot u_x, a \cdot b \cdot u_y)$$

6. $1 \in \mathbb{R}$, debe ser el elemento neutro en el producto.
   $1 \cdot u = u$ esto se cumple para todo $u \in V$
   $1 \cdot \langle u_x, u_y \rangle = u$
   $\langle 1 \cdot u_x, 1 \cdot u_y \rangle = u$
   $\langle u_x, u_y \rangle = u$. Se cumple.

7. Que la operación sea distributiva, esta debe analizarse por derecha y por izquierda.

   Veamos que sea distributiva por izquierda

$$a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}, \quad \forall a \in R, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

   En este caso tenemos:

$$a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}$$
$$a \cdot ((u_x, u_y) + (v_x, v_y)) = a \cdot (u_x, u_y) + a \cdot (v_x, v_y)$$
$$a \cdot (u_x + v_x, u_y + v_y) = (a \cdot u_x, a \cdot u_y) + (a \cdot v_x, a \cdot v_y)$$
$$a \cdot (u_x + v_x, u_y + v_y) = (a \cdot u_x + a \cdot v_x, a \cdot u_y + a \cdot v_y)$$
$$(a \cdot (u_x + v_x), a \cdot (u_y + v_y)) = (a \cdot (u_x + v_x), a \cdot (u_y + v_y))$$

   Veamos que sea distributiva por derecha

$$(a + b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{u}, \quad \forall a, b \in R, \quad \forall \mathbf{u} \in V$$

   Que en este caso tenemos:

$$(a + b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{u}$$
$$(a + b) \cdot (u_x, u_y) = a \cdot (u_x, u_y) + b \cdot (u_x, u_y)$$
$$(a + b) \cdot (u_x, u_y) = (a \cdot u_x, a \cdot u_y) + (b \cdot u_x, b \cdot u_y)$$
$$(a + b) \cdot (u_x, u_y) = (a \cdot u_x + b \cdot u_x, a \cdot u_y + b \cdot u_y)$$
$$((a + b) \cdot u_x, (a + b) \cdot u_y) = ((a + b) \cdot u_x, (a + b) \cdot u_y)$$

Se cumple. Como vemos esto demuestra que $\mathbb{R}^2$ sí es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

Verificar que los ejemplos definidos a continuación son espacios vectoriales queda como ejercicio para el estudiante.

Ej 2. Para cualquier $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar. Las propiedades 1 y 6 son consecuencia de las definiciones de dichas operaciones y las restantes se deducen al verificarlas.

Ej. 3. El conjunto de todas las matrices de $2\ x\ 3$ es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma matricial y multiplicación escalar matricial. Aquí los "vectores" en realidad son matrices. Se sabe que la suma de dos matrices de $2\ x\ 3$ también es una matriz de $2\ x\ 3$ y que al multiplicar una matriz de $2\ x\ 3$ por un escalar produce otra matriz de $2\ x\ 3$; por tanto, se tiene cerradura. Las propiedades restantes se deducen al verificarlas. En particular, el vector cero 0 es la matriz cero de $2\ x\ 3$, y el negativo de una matriz A de $2\ x\ 3$ es justo la matriz $-A$ de $2\ x\ 3$. No hay nada especial acerca de las matrices de $2\ x\ 3$. Para cualesquiera enteros positivos m y n, el conjunto de todas las matrices de $n\ x\ m$ forma un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma matricial y multiplicación escalar matricial. Este espacio vectorial se denota M_{mxn}.

Ej 4. Sea $\mathcal{P}_2$ el conjunto de todos los polinomios de grado 2 o menor con coeficientes reales. Define la suma y multiplicación por un escalar en la forma usual. Si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ están en $\mathcal{P}_2$, entonces $p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$ tiene cuando mucho grado 2 y por tanto está en $\mathcal{P}_2$.

Si c es un escalar, entonces $c \cdot p(x) = ca_0 + ca_1x + ca_2x^2$ también está en $\mathcal{P}_2$. Que verifica las propiedades 1 y 6.
El vector cero 0 es el polinomio cero; esto es, el polinomio cuyas entradas son todas cero.
El negativo de un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ es el polinomio $-p(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2$.
Ahora es fácil verificar los axiomas restantes. Se comprobará el axioma 2 y se dejan los otros como ejercicio para el estudiante.

Con los anteriores $p(x)$ y $q(x)$, se tiene

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \\ &= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + (b_2 + a_2)x^2 \\ &= (b_0 + b_1x + b_2x^2) + (a_0 + a_1x + a_2x^2) \\ &= q(x) + p(x) \end{aligned}$$

donde la tercera igualdad es consecuencia del hecho de que la suma de números reales es conmutativa.

En general, para cualquier $n \geq 0$ fijo, el conjunto $\mathbb{R}^n$ de todos los polinomios de grado menor o igual a n es un espacio vectorial, como lo es el conjunto $\mathcal{P}$ de *todos* los polinomios.

Ej. 4. Sea $V = \mathbb{R}^2$ con la definición usual de suma, pero la siguiente definición de multiplicación por un escalar: $c \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx \\ 0 \end{bmatrix}$. Entonces, por ejemplo,

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

de modo que falla la propiedad 10. [De hecho, las otras nueve propiedades son todas verdaderas (compruébelo), pero no es necesario sondear en ellos, porque V ya falló en ser un espacio vectorial. Este ejemplo demuestra el valor de anticiparse, en lugar de trabajar a lo largo de una lista de axiomas en el orden en el que se presentan.]

Subespacio vectorial

Definición*:** Un subconjunto W de un espacio vectorial V se llama ***subespacio de V si W es en sí mismo un espacio vectorial con los mismos escalares, suma y multiplicación por un escalar que V. Se extiende este concepto a espacios vectoriales en general.

Sea V un espacio vectorial, u un vector en V, y c un escalar,

1. $0 \cdot u$=0
2. $c \cdot 0 = 0$
3. $(-1)u = -u$
4. $si\ cu = 0$, entonces $c = 0$ o $u = 0$

En $\mathbb{R}^n$ es posible que un espacio vectorial se asiente dentro de otro, lo que da lugar a la noción de subespacio.

Base de un espacio vectorial

Las *bases* revelan la estructura de los espacios vectoriales de una manera concisa. Una base es el menor conjunto (finito o infinito) $B = \{\mathbf{v}_i\}_{i \in I}$ de vectores que generan todo el espacio. Esto significa que cualquier vector **v** puede ser expresado como una suma (llamada *combinación lineal*) de elementos de la base

Definición

Decimos que un sistema de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una *base* de un espacio vectorial V, si es un sistema generador de V y es linealmente independiente.

Ejemplos

El sistema $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ a la que llamamos *base canónica*. En general decimos que el sistema $\{(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),(0,0,\ldots,0,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Prueba como ejercicio que $\{(1,2),(0,2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

Coordenadas de un vector en una base

Dado que una base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un sistema generador, podemos expresar cualquier vector w de V como combinación lineal de la base. Además los coeficientes de dicha combinación lineal son únicos, pues si existiesen dos distintos:

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = a'_1 v_1 + a'_2 v_2 + \cdots + a'_n v_n$$

entonces

$$(a_1 - a'_1)v_1 + (a_2 - a'_2)v_2 + \cdots + (a_n - a'_n)v_n = \mathbf{0},$$

y como la base es linealmente independiente, deducimos que $a_i = a'_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Llamaremos a dichos coeficientes *coordenadas* de w en B.

Teorema de existencia de la base y la dimensión

Dado un espacio vectorial V, podemos preguntarnos si existe una base para dicho subespacio. El teorema de la existencia de la base nos asegura que siempre existe y además si el espacio es finitamente generado (existe un sistema generador con un número finito de elementos), entonces todas las bases de dicho espacio tienen el mismo número de elementos. Llamaremos a dicho número la *dimensión* de V.

Observemos que existen espacios vectoriales de dimensión infinita (que no son finitamente generados), como por ejemplo el de los polinomios de cualquier grado, pero dichos espacios vectoriales no serán tratados en este curso.

Ejercicios

1. Determina cuales de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

   (I) $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + 3y = 2z\}$
   (II) $T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y = 2z + 1\}$
   (III) $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 2z + t\}$
   (IV) $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2y = 1\}$
   (V) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + 3t = 2y\}$
   (VI) $X = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = 1; y + z = 0\}$

2. Obtén el valor de x sabiendo que el vector $(8,7,x,6)$ pertenece al subespacio

   $$W = \langle (1,2,3,0), (2,1,1,2) \rangle$$

   de $\mathbb{R}^4$.

3. Determina un sistema generador de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

   (I) $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + 3y = z\}$
   (II) $T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y = 2z\}$
   (III) $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y = 2z + t\}$
   (IV) $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2y = t\}$
   (V) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + 3t = 2y\}$
   (VI) $X = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = 0; y + z = 0\}$

4. Halla el valor de x e y para que el vector $(x,y,-23,-5)$ pertenezca al subespacio

   $$\langle (1,2,-5,3), (2,-1,4,7) \rangle.$$

5. Demuestra que los subespacios $U = \langle(1,0,1),(0,2,1)\rangle$ y $V = \langle(1,2,2),(-1,4,1)\rangle$ son iguales.

6. Determina cuales de las siguientes familias de $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes:

   (I) $A = \{(0,0,1),(1,0,0)\}$
   (II) $B = \{(0,0,0),(1,1,0)\}$
   (III) $C = \{(1,2,4)\}$
   (IV) $D = \{(0,2-4),(1,-2,1),(1,4,3)\}$
   (V) $E = \{(2,4,1),(6,12,3)\}$
   (VI) $F = \{(1,2,3),(0,1,0),(2,5,1),(0,0,1)\}$

7. Demuestra que si los vectores u, v y w son linealmente independientes, entonces también lo son los vectores $u+v$, $u+w$ y $v+w$. ¿Si los tres últimos vectores son linealmente dependientes, entonces también lo son los tres primeros?

8. ¿Qué valor tienen que tener x e y para que los vectores $(3,-2,-1,3$, $(1,0,2,4)$ y $(7,-4,x,y)$ sean linealmente dependientes?

9. Demuestra que los vectores $(2,0,1),(2,0,3),(0,4,0)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

10. Obtén una base de los subespacios de $\mathbb{R}^4$ descritos en el ejercicio 3.

11. Halla el valor de x para que los vectores $(x,-3,2)$, $(2,3,x)$ y $(4,6,-4)$ engendren un subespacio vectorial de dimensión 1.

12. Las coordenadas de un vector v de $\mathbb{R}^3$ respecto a la base $B = \{(1,2,0),(0,2,4),(1,0,4)\}$ son $(2,2,3)$. Halla las coordenadas de v en la base $B' = \{(2,2,0),(1,0,1),(3,2,0)\}$.

13. Halla las coordenadas del vector $(1,4,2)$ en las bases:

    (I) $A = \{(0,0,1),(1,2,0),(0,1,1)\}$
    (II) $B = \{(1,2,3),(1,1,0),(0,0,1)\}$
    (III) $C = \{(1,2,1),(1,1,1),(1,0,0)\}$
    (IV) $D = \{(0,2-4),(1,2,1),(1,4,3)\}$
    (V) $E = \{(2,4,1),(1,1,3),(1,0,1)\}$
    (VI) $F = \{(1,2,3),(0,1,0),(2,5,1)\}$

Espacios normados

Definición: si X es un espacio vectorial sobre K, una *norma* en X es una función $x \to \|x\|$, de $\mathbb{R}_0^+$ verificando:

i. $\|x\| = 0 \to x = 0$
ii. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ con $(\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$
iii. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|x\|$ para $(x, y \in X)$ llamada *desigualdad triangular*

Una seminorma es una funcion $x \to p(x) \in \mathbb{R}_0^+$ si verifica las condiciones (ii) y (iii) anteriores, note que gracias a (ii), se tiene $p(0) = 0$ para cualqueir seminorma.

*Un **espacio normado** es un par $(X, \|\cdot\|)$, donde X es un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ es una norma en X. Cuando no haya lugar a confusión omitiremos la segunda componente del par. Por otra parte, escribiremos $\|\cdot\|_X$ cuando queramos resaltar que trabajamos con una norma en el espacio X.*

Notaremos $B_X = \{x \in X \ : \ \|x\| \leqslant 1\}$ y $S_X = \{x \in X \ : \ \|x\| = 1\}$, conjuntos que llamaremos, respectivamente, bola unidad y esfera unidad de X.

Todo espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se convierte automáticamente en un espacio métrico con la distancia

$$d(x,y) = \|y - x\| \qquad (x, y \in X).$$

*Cuando d es completa decimos que la norma $\|\cdot\|$ es **completa** y que $(X, \|\cdot\|)$ es un **espacio de Banach**. La topología asociada a d suele denominarse **topología de la norma** en X. Cuando no se especifique lo contrario, todas las nociones topológicas sobre un espacio de Banach se referirán a la topología de la norma y todas las nociones métricas a la distancia d. En particular, si A es un subconjunto de un espacio normado X, $\overline{A}$ y $\mathring{A}$ —o $\operatorname{int}(A)$— denotan, respectivamente, el cierre y el interior de A. Por otro lado,*

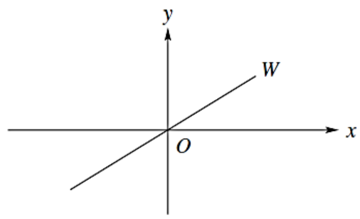
Un espacio normado es un espacio métrico, donde la distancia viene dada por: $d(x, y) = \|x - y\|$ aquí toda la distancia inducida por esta norma es una distancia. Por tanto, un *espacio vectorial normado* es un espacio vectorial en el que se ha definido explícitamente una norma vectorial. Podemos señalar los siguientes hechos que ayudan a comprender la importancia del concepto de espacio normado:

- En un espacio euclídeo, la norma coincide precisamente con la longitud del vector.
- Todo espacio vectorial normado es un espacio métrico con la distancia inducida por la norma.
- Si el espacio vectorial es además completo se dice que es un espacio de Banach.

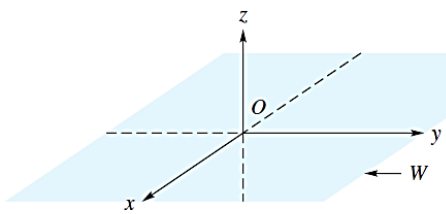
Nótese que sobre un espacio vectorial se pueden definir diferentes normas, lo cual da lugar a diferentes espacios normados que tienen el mismo espacio vectorial como base de la co

Ejercicios

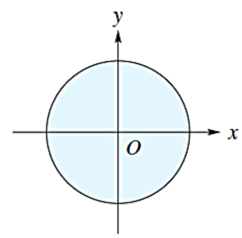
1. El conjunto W formado por todos los puntos de R^2 que tienen la forma (x, x) es una línea recta. ¿Es W un subespacio de R^2? Explique.



2. Sea W el conjunto de todos los puntos en R^3 que están en el plano xy. ¿Es W un subespacio de R^3? Explique.



3. En el plano xy, considere el círculo centrado en el origen y cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$. Sea W el conjunto de todos los vectores cuya cola está en el origen y cuya cabeza es un punto interior a la, o en la circunferencia. ¿Es W un subespacio de R^2? Explique.



4. Considere el cuadrado unitario que se muestra en la figura adjunta. Sea W el conjunto de todos los vectores de la forma $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, donde $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Esto es, W es el conjunto de todos los vectores cuya cola está en el origen y su cabeza es un punto interior al cuadrado, o sobre sus lados. ¿Es W un subespacio de R^2? Explique.

5. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de R^3 son subespacios de R^3? El conjunto de todos los vectores de la forma

(a) $(a, b, 2)$

(b) (a, b, c), donde $c = a + b$

(c) (a, b, c), donde $c > 0$

1. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

2. $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

Solución:

1. Sean c_1, c_2, c_3 y c_4 escalares reales tales que

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sumando e igualando componente a componente, se obtiene el sistema lineal homogéneo

$$\begin{array}{ccccccccc} c_1 & + & c_2 & + & 2c_3 & + & 2c_4 & = & 0 \\ c_1 & & & + & c_3 & + & 2c_4 & = & 0 \\ c_1 & + & c_2 & + & 2c_3 & + & 2c_4 & = & 0 \\ c_1 & & & + & c_3 & + & 2c_4 & = & 0. \end{array}$$

En resumen, el conjunto de vectores es L.I. si el anterior sistema homogéneo tiene solución única y es L.D. si el sistema tiene infinitas soluciones. Aplicando eliminación de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{R_3-R_1, R_4-R_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{R_2-R_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dado que hay dos variables libres y el sistema es homogéneo, el sistema anterior tiene infinitas soluciones. Por tanto, el conjunto S es linealmente dependiente.

2. Sean c_1, c_2 y c_3 escalares reales tales que

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sumando e igualando componente a componente, tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 0 \\ 2c_1 & & & & & = & 0 \\ 3c_1 & + & 3c_2 & & & = & 0 \\ 4c_1 & & & + & c_3 & = & 0. \end{array}$$

Apliquemos eliminación de Gauss-Jordan, para ver si el sistema homogéneo anterior tiene solución única o infinitas soluciones:

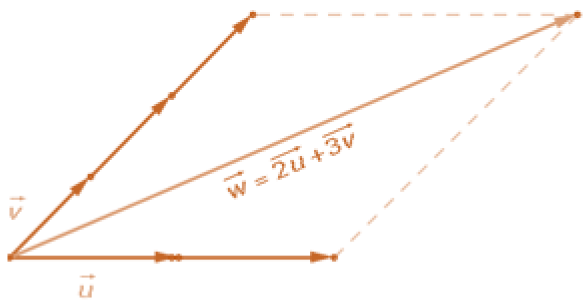
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Así, el sistema anterior tiene solución única. Por tanto, el conjunto T es linealmente independiente.

Nota: Si un conjunto de vectores contiene al vector 00, entonces este conjunto es automáticamente L.D.

Combinación lineal

Una combinación lineal de dos o más vectores es el vector que se obtiene al sumar esos vectores multiplicados por escalares $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n$. Cualquier vector se puede escribir como combinación lineal de otros que tengan *distinta dirección* $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$ y esta *combinación lineal* es *única*.



Vectores linealmente dependientes

Varios vectores libres del plano se dice que son *linealmente dependientes* si hay una combinación lineal de ellos que es igual al vector cero, sin que sean cero todos los coeficientes de la *combinación lineal*. $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$ [ecuación 1]

Propiedades

1. Si varios vectores son linealmente dependientes, entonces al menos uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás.
   $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n = \vec{0} \to \vec{v}_1 = -\frac{a_2}{a_1}\overrightarrow{v_2} - \cdots - \frac{a_n}{a_n}\overrightarrow{v_n}$
   También se cumple el reciproco: si un vector es combinación lineal de otros, entonces todos los vectores son linealmente dependientes.
2. Dos vectores del plano son linealmente dependientes si, y sólo si, son paralelos.
3. Dos vectores libres del plano $\vec{u} = \langle u_1, u_2\rangle$, $\vec{v} = \langle v_1, v_2\rangle$, son linealmente dependientes si sus componentes son proporcionales. $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = k$
4. n vectores en $\mathbb{R}^n$son linealmente dependientes si su determinante es igual a cero.

Ejemplo

Determinar los valores de k para que sean linealmente dependientes los vectores $\vec{u} = \langle 3, k, -6\rangle$, $\vec{v} = \langle -2, 1,\ k+3\rangle$, $\vec{w} = \langle 1,\ k+2, 4\rangle$. Escribir $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$, siendo k el valor calculado.

Solución:

Los vectores son linealmente dependientes si el determinante de la matriz que forman es nulo, es decir que el rango de la matriz es menor que 3.

a. Calculamos el determinante $\begin{vmatrix} 3 & k & -6 \\ -2 & 1 & k+3 \\ 1 & k+2 & 4 \end{vmatrix} = k^2 - 4k - 12$
b. Igualamos el determinante a cero $k^2 - 4k - 12 = 0$
c. Resolvemos la ecuación y obtenemos $k = -2, \ \wedge\ k = 6$

d. Así para $k = -2$ los vectores son $\vec{u} = \langle 3, -2, -6 \rangle$, $\vec{v} =$, $\vec{w} = \langle 1,\ 0, 4 \rangle$.
e. Escribimos $\vec{u}$ en términos de $\vec{v}$ y $\vec{w}$: $\langle 3, -2, -6 \rangle = a\langle -2, 1, 1 \rangle + b\langle 1, 0, 4 \rangle$.
f. Calculamos los valores de los escalares a y b

$$\langle 3, -2, -6 \rangle = a\langle -2, 1, 1 \rangle + b\langle 1, 0, 4 \rangle$$

$$= \langle -2a + b, a,\ a + 4b \rangle$$

g. Igualando las coordenadas del lado izquierdo con las del derecho y resolviendo las ecuaciones obtenemos $a = -2$ y $b = -1$
h. Así la combinación lineal buscada es: $\vec{u} = -2\vec{v} - \vec{w}$
i. Se repiten los pasos 4, 5, 6 y 7 para $k = 6$.

Vectores linealmente independientes

Varios vectores libres son *linealmente independientes* si ninguno de ellos puede ser escrito con una combinación lineal de los restantes, de manera que, si la combinación lineal es igual a cero, entonces cada uno de sus coeficientes es igual a cero $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n = \vec{0} \to a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$

Los vectores linealmente independientes tienen distinta dirección y sus componentes no son proporcionales. n vectores en $\mathbb{R}^n$ son *linealmente independientes si su determinante es distinto de cero*.

Ejemplo

Estudiar si son linealmente dependientes o independientes los vectores $\vec{u} = \langle 2, 3, 1 \rangle$, $\vec{v} = \langle 1, 0,1 \rangle$, $\vec{w} = \langle 0,3, -1 \rangle$.
Solución:

a. Calculamos el determinante de los vectores $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$
b. Como el determinante es igual a cero, concluimos que los vectores son linealmente dependientes.

Ejercicios

1. ¿Cuales de los siguientes vectores generan a $\mathbb{R}^2$?
   a. (1,2), (-1,1)
   b. (0,0), (1,1), (-2,-2)
   c. (1,3), (2,-3), (0,2)
   d. (2,4), (-1,2)

2. ¿Cuales de los siguientes conjuntos de vectores generan a $\mathbb{R}^3$?
   a. $\{(1, -1, 2), (0,1,1)\}$
   b. $\{(1, 2, -1), (6, 3, 0), (4, -1, 2), (2, -5, 4)\}$
   c. $\{(2, 2,\ 3), (-1, -2, 1), (0, 1, 0)\}$
   d. $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$

3. ¿Cuáles de los siguientes vectores generan a R^4?

(a) (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0)

(b) (1, 2, 1, 0), (1, 1, −1, 0), (0, 0, 0, 1)

(c) (6, 4, −2, 4), (2, 0, 0, 1), (3, 2, −1, 2), (5, 6, −3, 2), (0, 4, −2, −1)

(d) (1, 1, 0, 0), (1, 2, −1, 1), (0, 0, 1, 1), (2, 1, 2, 1)

4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de polinomios generan a P_2?

(a) $\{t^2 + 1, t^2 + t, t + 1\}$

(b) $\{t^2 + 1, t - 1, t^2 + t\}$

(c) $\{t^2 + 2, 2t^2 - t + 1, t + 2, t^2 + t + 4\}$

(d) $\{t^2 + 2t - 1, t^2 - 1\}$

5. ¿Generan los polinomios $t^3 + 2t + 1$, $t^2 - t + 2$, $t^3 + 2$, $-t^3 + t^2 - 5t + 2$ a P_3?

Nota: el procedimiento para determinar si los vectores $v_1, v_2, \cdots v_k$ son linealmente dependientes o linealmente independientes se sigue:

i. Plantear la ecuación [1] que conduce a un sistema homogéneo.
ii. Si el sistema es homogéneo, obtenido en el numeral i, tiene solo la solución trivial, entonces los vectores dados son linealmente independientes; si tiene una sola solución no trivial, entonces los vectores son linealmente dependientes.

Base

Tres vectores $\vec{u}, \vec{v},\ \vec{w},$ con distinta dirección forman una base, porque cualquier vector $\vec{A}$, del espacio se puede representar como combinación lineal de ellos: $\vec{A} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

Las coordenadas del vector respecto a la base son: $\vec{A} = (a, b, c)$

- *Base ortogonal*: se da cuando los vectores de la base son perpendiculares entre sí.
- *Base ortonormal*: se da si los vectores de la base son perpendiculares entre sí, y además tienen módulo 1.
- *Base canónica:* está formada por los vectores $\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$.

En resumen: un conjunto de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots \vec{v}_n$ es una base para un espacio vectorial *V* si cumple:

$i.$ $\{\vec{\mathrm{v}}_1, \vec{\mathrm{v}}_2, \cdots, \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{n}\}$ es linealmente independiente
$ii.$ $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n\}$ genera a *V*.

Todo conjunto de n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ es una base en $\mathbb{R}^n$

La ***base*** canónica en $\mathbb{R}^n$ consiste *n* vectores de la forma:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dimensión: Si el espacio vectorial V tiene una base finita, entonces la *dimensión* de V es el numero de vectores en cada base y V se denomina un *espacio vectorial de dimensión finita*. De otra manera, V se denomina *espacio vectorial de dimensión finita*. Si $V = \{0\}$, entonces se dice que V tiene *dimensión cero*.

Ejemplo

¿Para qué valores de a los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (1, a, 1)$, $\vec{w} = (1,1, a)$ forman una base?

Solución:

a. Calculamos el determinante de los vectores $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 2a + 1$
b. El determinante se hace cero para $a = 1$, luego los vectores son linealmente dependientes y no forman una base si $a = 1$.
c. El determinante es distinto de cero para $a \neq 1$, luego los vectores son linealmente independientes y forman una base si $a \neq 1$.

Ejercicios

1. Sea W un subespacio de R^3 con base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, donde $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 1)$ y $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$. Exprese $\mathbf{v} = (2, 2, 0)$ como suma de un vector $\mathbf{w}$ en W y un vector $\mathbf{u}$ en $W^\perp$.

2. Sea W un subespacio de R^4 con base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, donde $\mathbf{w}_1 = (1, 1, 1, 0)$ y $\mathbf{w}_2 = (1, 0, 0, 0)$. Exprese $\mathbf{v} = (1, 1, 0, 0)$ como suma de un vector $\mathbf{w}$ en W y un vector $\mathbf{u}$ en $W^\perp$.

3. Sea W un subespacio de R^3 generado por el vector $\mathbf{w} = (2, -3, 1)$.

(a) Determine una base $W^\perp$.

(b) Describa geométricamente $W^\perp$. (Puede utilizar una descripción verbal o gráfica.)

4. Sea $W = \text{gen}\{(1, 2, -1), (-1, 3, 2)\}$.

(a) Determine una base para $W^\perp$.

(b) Describa geométricamente $W^\perp$. (Puede utilizar una descripción verbal o gráfica.)

5. Sea W el subespacio de R^5 generado por los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5$, donde

$$\mathbf{w}_1 = (2, -1, 1, 3, 0), \quad \mathbf{w}_2 = (1, 2, 0, 1, -2),$$
$$\mathbf{w}_3 = (4, 3, 1, 5, -4), \quad \mathbf{w}_4 = (3, 1, 2, -1, 1),$$
$$\mathbf{w}_5 = (2, -1, 2, -2, 3).$$

Determine una base para $W^\perp$.

En los ejercicios 6 y 7, calcule los cuatro espacios vectoriales fundamentales asociados con A y compruebe el teorema 6.22.

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -4 & -6 \\ 4 & 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -9 & 5 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 8 y 9, determine $\text{proy}_W \mathbf{v}$ *para el vector* $\mathbf{v}$ *y el subespacio* W dados.

8. Sea W el subespacio de R^3 con base

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \quad \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

(a) $\mathbf{v} = (3, 4, -1)$ (b) $\mathbf{v} = (2, 1, 3)$

(c) $\mathbf{v} = (-5, 0, 1)$

9. Sea W el subespacio de R^4 con base $(1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)$.

Para los siguientes puntos justifique su respuesta.

10. Tres vectores cualesquiera en $\mathbb{R}^3$ ¿forman una base para $\mathbb{R}^3$?
11. Tres vectores cualesquiera, linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$¿ forman una base para $\mathbb{R}^3$?
12. Una base en un espacio vectorial es única.
13. Sea H un subespacio propio de$\mathbb{R}^4$ ¿es posible encontrar cuatro vectores linealmente independientes en H?

Referentes bibliográficos

1. Grossman S, Flores J. (2012). *Álgebra Lineal*, Séptima edición. Mc Graw Hill.
2. Poole, D. (2011.) *Álgebra Lineal. Una Introducción Moderna.* Cengage.
3. Larson, L. (2015). *Fundamentos de Álgebra Lineal.* Versión Revisada. Cengage.