Dr. Enrique Mateus-Nieves
Postdoctor en Educación Matemática

LÍMITES DE FUNCIONES

Se dice que una función $y = f(x)$ tiene límite "L" cuando la x tiende a "a" y lo representamos por: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ cuando para toda sucesión de números reales que se aproxime a "a" tanto como queramos, los valores correspondientes de $f(x)$ se aproximan a "L" tanto como queramos. ("tanto como queramos" es una expresión que nos indica que la aproximación será tanto mayor cuantos más elementos tomemos de la sucesión). Veamos un ejemplo:

Ejemplo 1. Consideremos la función $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ y tratemos de calcular su límite cuando x tiende a 2.

Tomamos la sucesión a_n = {1-1,9-1,99-1,999-1,9999-....} y veamos a qué valor se aproxima $f(a_n)$, para

a_n	1	1,9	1,99	1,999	1,9999	1,99999	1,999999	.....	2
$f(a_n)$	-2	-29	-299	-2999	-29999	-299999	-2999999	.....	$-\infty$

Parece que los valores de la función se aproximan, tanto como queramos a menos infinito, pero nos preguntamos ¿Qué ocurriría si la sucesión elegida fuese decreciente, en lugar de creciente, veámoslo:

a_n	3	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001	2.000001	....	2
$f(a_n)$	4	31	301	3001	30001	300001	3000001	....	$+\infty$

Ahora los valores se aproximan a más infinito.

Es decir, si la sucesión tiende a 2 pero conservándose todos sus términos menores que 2, la función tiende a un límite y si los valores de la sucesión se conservan todos mayores que dos la función tiende a otro distinto. Afirmamos que no existe límite en el punto 2 para la función dada.

Ejemplo 2. Calcular el límite $\lim_{x \to 3} \frac{x+1}{x-2}$ Vamos a proceder como antes con una sucesión creciente y otra decreciente que se aproximen ambas a 3 tanto como queramos:

a_n	2,1	2,9	2,99	2,999	2,9999	2,99999	2,999999	....	3
$f(a_n)$	31	4,3333	4,0303	4,0030	4,0003	4,00003	4,000003	....	4

Y para una decreciente

a_n	4	3,1	3,01	3,001	3,0001	3,00001	3,000001	....	3
$f(a_n)$	2,5	3,7272	3,9703	3,9970	3,9997	3,99997	3,999997	....	4

Como los valores que toma la función para ambas sucesiones tienden al mismo valor 4, podemos escribir $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x+1}{x-2} = 4$

De los dos ejemplos anteriores obtenemos las siguientes conclusiones:

- Se llama **límite lateral por la izquierda** de $f(x)$ cuando x tiende a "a" al valor al que se aproximan los valores de $f(a_n)$ cuando los valores de a_n se aproximan a "a" tanto como queramos pero manteniéndose menores que "a" (sucesión creciente). Escribimos entonces: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$

- Se llama **límite lateral por la derecha** de $f(x)$ cuando x tiende a "a" al valor al que se aproximan los valores de $f(a_n)$ cuando los valores de a_n se aproximan a "a" tanto como queramos pero manteniéndose mayores que "a" (sucesión decreciente). Escribimos: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

Teorema: El límite de una función si existe es único y únicamente si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, es decir, si ambos límites laterales coinciden.

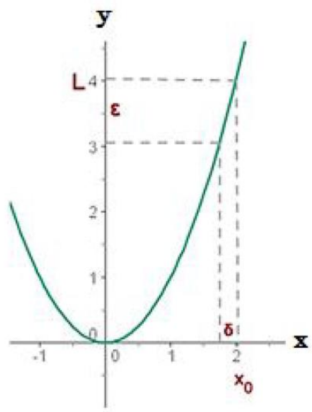
Concepto de límite. Casos de indeterminación.

Hemos definido el límite de $f(x)$ cuando x tiende a "a" por medio de sucesiones. Esta definición aunque muy comprensible desde el punto de vista intuitivo, nos obligaría a comprobar todas las sucesiones que se aproximan a "a" (o al menos muchas de ellas) y ver hacia quién tiende $f(a_n)$. El cálculo pude ser engorroso y la definición poco rigurosa si sólo comprobamos una ó dos. Una definición más rigurosa es:

Definición formal de límite: "Se dice que $f(x)$ tiene por límite L cuando x tiende a "a" y se escribe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, si para todo número real $\xi > 0,$ y suficientemente pequeño, es posible determinar otro número real $\delta > 0,$ que depende de ξ, tal que si se cumple $|x - a| < \delta$, entonces se ha de cumplir que $|f(x) - L| < \xi$ **".**

La definición anterior equivale a decir que para todo entorno de "L", $(L - \xi, L + \xi)$ existe otro de "a" $(a - \delta, a + \delta)$ en el cual todo punto de este entorno menos "a" por medio de la función va al entorno $(L - \xi, L + \xi)$.

Gráficamente:



Ejemplo 3. Demostrar que $\lim_{x \to 2} \frac{5x+2}{4} = 3$

Consideremos un $\xi > 0,$ debemos de encontrar un $\delta > 0,$ que verifique $|x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \xi$,

entonces: , $\left|\frac{5x+2}{4} - 3\right| < \xi \Rightarrow \left|\frac{5x - 10}{4}\right| < \xi \Rightarrow -\xi < \frac{5x - 10}{4} < \xi$ despejando x tenemos:

$-4\xi < 5x - 10 < 4\xi \Rightarrow 10 - 4\xi < 5x < 10 + 4\xi \Rightarrow \frac{10 - 4\xi}{5} < x - 2 < \frac{10 + 4\xi}{5}$ Basta con tomar:

$|x - 2| < \frac{4\xi}{5}$ *de ahí que* $\delta = \frac{4\xi}{5}$ Para que cumpla la definición.

Diremos que un límite es **determinado** si es un número real. Y si es $-\infty, ó, +\infty$ se dirá que es **indeterminado**. Existen 7 casos de indeterminación (no tienen sentido estos resultados): $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \cdot \infty; 1^{\infty}; \infty^0; 0^0$ En apartados posteriores diremos cómo solucionar cada una de ellas

Cálculo de límites

1. Límites de funciones polinómicas. Distinguiremos dos casos:

- **Cuando** $x \to a$ Basta calcular $f(a)$.

  Ejempló: calcular $\lim_{x \to -2} \left(2x^3 - x^2 + 8\right)$ aquí basta con evaluar $f(-2)$, veamos:

  $f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - (-2)^2 + 8 = -16 - 4 + 8 = 12$

- **Cuando** $x \to \pm\infty$: En este caso el polinomio es equivalente al término de mayor grado, ya que el resto de los términos son insignificantes respecto de aquél y se pueden despreciar. El límite será $+\infty$, ó, $-\infty$ dependiendo el signo del que tenga el término de mayor grado y de si el exponente es par o impar:

  Ejemplos:

  $\lim_{x \to -\infty} \left(-5x^5 + 2x^4 + 3x - 1\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(-x^5\right) = +\infty$

  $\lim_{x \to +\infty} \left(-5x^5 + 2x^4 + 3x - 1\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x^5\right) = -\infty$

2. Límites de funciones racionales. Pueden darse dos casos:

a) Sea $\lim\limits_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$

si $Q(a) \neq 0$, se tiene que $\lim\limits_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$

Si $Q(a) = 0$, y $P(a) \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{0} = \pm\infty$

Si $Q(a) = 0$, y $P(a) = 0$, tenemos el caso de indeterminación $\frac{0}{0}$. Pero entonces como el numerador y el denominador son divisibles por $(x\text{-}a)$, factorizando por la regla de Ruffini o utilizando las igualdades notables, podemos simplificar la fracción algebraica y puede desaparecer la indeterminación:

Ejemplos:

- $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{x-5}{(x+5)(x-5)} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{10}$
- $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x+6}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{9}{0} = \pm\infty$

En este último caso determinaremos el signo del infinito calculando los límites laterales:

- Por izquierda: $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x+6}{x^2-5x+6} = -\infty$ Ya que si x tiende a 3 pero se conserva menor que 3, el numerador es positivo y el denominador negativo (basta dar a la "x" del denominador el valor 2,99 y se obtiene como valor numérico -0,0099

- Por derecha: $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x+6}{x^2-5x+6} = +\infty$ Pues para x tendiendo a 3 pero conservándose mayor que 3, el numerador es positivo y el denominador también (basta dar a "x" el valor 3,01 para obtener 0,0101.

b). sea $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$: Obtenemos una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ que se subsana dividiendo numerador y denominador por el x de mayor grado:

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-7x+1}{x^3+x^2-2x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3}-\frac{7x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{5+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}} = \frac{0}{5} = 0$$

De la forma como hemos resuelto el ejemplo se deduce que si los términos de mayor grado de $P(x)$ y $Q(x)$ son respectivamente ax^n y bx^m, pueden ocurrir tres casos:

- Si $n > m$ el límite es ∞
- Si $n = m$ el límite es $\frac{a}{b}$
- Si $n < m$ el límite es 0

Si la función es suma o resta de dos fracciones algebraicas, puede aparecernos una indeterminación del tipo $\infty - \infty$ que puede desaparecer haciendo previamente la suma o resta.

No podemos terminar esta parte sin antes ver la forma de calcular los límites de funciones potenciales-exponenciales donde tanto la base como el exponente son funciones racionales, es decir, límites del tipo: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right)^{\frac{R(x)}{S(x)}}$ en caso en que la función racional de la base tienda a 1 y la del exponente a infinito. Hablamos de solucionar la indeterminación 1^{∞}. Hay **dos formas** de hacerlo:

a) Tratando de poner la fracción racional de la fase en la forma $\left(1+\dfrac{1}{T(x)}\right)$ para lo cual habrá que dividir los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ y recordar que cualquier división de este tipo nos permite poner la fracción en la forma: $\left(\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right)=C(x)+\dfrac{r(x)}{Q(x)}$, , siendo $C(x)$ el cociente y $r(x)$ el resto.

Realizando las transformaciones necesarias tanto en la base como en el exponente podemos llegar a una solución en la que intervenga el número "e".

Veamos el siguiente ejemplo $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3}{x^2+4}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$ donde la base tiende a 1 y el exponente a infinito.

b) Otra forma de eliminar esta indeterminación es recurriendo a la llamada **regla de oro que nos dice que si $a(x)$ tiende a 1 y $b(x)$ tiende a infinito, se cumple:** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[a(x)\right]^{b(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty} b(x)\cdot[a(x)-1]}$ La justificación de esta regla es: Llamando "L" al límite buscado y tomando logaritmos neperianos en la expresión del límite anterior quedaría (recordando la posibilidad de intercambio del logaritmo con el límite):

$$\ln L=\ln\lim_{x\to\infty}\left[a(x)\right]^{b(x)}=\lim_{x\to\infty} b(x)\cdot\ln\left[a(x)\right]=\lim_{x\to\infty} b(x)\cdot\ln\left[1+a(x)-1\right]=\lim_{x\to\infty} b(x)\cdot\ln\left[1+\frac{1}{\frac{1}{a(x)-1}}\right]=$$

$$\lim_{x\to\infty} b(x)\cdot\ln\left[1+\frac{1}{\frac{1}{a(x)-1}}\right]^{\frac{1}{a(x)-1}[a(x)-1]}=\lim_{x\to\infty} b(x)\cdot\left[a(x)-1\right]\cdot\ln e=\ln L$$

. Y de ahí se deduce que:

$$L=\lim_{x\to\infty}\left[a(x)\right]^{b(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty} b(x)\cdot[a(x)-1]}$$

como queríamos probar.

Veamos un ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{2x^2+4}\right)^{\frac{3x-2}{5}}$$

Será: $L=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-2}{5}\left[\frac{2x^2+1}{2x^2+4}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-2}{5}\cdot\frac{2x^2+1-2x^2-4}{2x^2+4}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x+6}{10x^2+20}=}e^{0}=1$

3. Límite de funciones irracionales.

Sea f(x) una función en la que aparece un radical. Pueden darse dos casos:

a) **Cuando x tiende a "a":** Si al sustituir x por a aparece una indeterminación del tipo 0/0 basta multiplicar y dividir por la expresión conjugada.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4}$$

b) **Cuando x tiende a infinito:** Puede aparecernos una indeterminación del tipo $\infty-\infty$ que se soluciona como antes multiplicando y dividiendo por el conjugado.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\infty}=0$$

Asíntotas. Las asíntotas son líneas rectas a las cuales se aproxima, tanto como queramos, alguna rama de una función. Puede haber tres tipos de asíntotas:

a) **Verticales:** La recta $x=a$ es una asíntota vertical de la función $y=f(x)$ si se cumple que $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$

b) **Horizontales:** La recta $y=L$ es una asíntota horizontal de $y=f(x)$ si se cumple que $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$

c) **Oblicuas:** La recta $y=mx+n$ es una asíntota oblicua de la función $y=f(x)$ si se cumple que:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\quad\wedge\quad n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]$$

Para conocer la posición de la curva con relación a su asíntota calculamos:

- Para las verticales los límites laterales: $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y comprobamos si la curva va a $-\infty$ ó a $+\infty$
- Para las horizontales los límites: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y vemos si se acerca a la recta $y=L$ por la derecha o por la izquierda.
- Para las oblicuas calculamos: $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(mx+n)\right]$; $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(mx+n)\right]$ y vemos si está por encima o por debajo de la curva.

Nota: - Las funciones polinómicas carecen de asíntotas.

- Las funciones racionales pueden tenerlas de los tres tipos y las podemos calcular así:

- Las verticales se obtienen de los valores que anulan el denominador.
- Las horizontales existirán si el grado del numerador es menor que el del denominador.
- Las oblicuas existirán si el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador.

Ejemplo: Encontrar y dibujar las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$ será: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 3x + 2}{x+1}$, no hay asíntotas horizontales. Como: $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x+1} = \infty$, la recta $x= -1$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)} = 1$ como $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x+1} - x\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-4x + 2}{x+1} = -4$ la recta y= x-4 es asíntota oblicua.

Propiedades de los límites:

- Si c es una constante y "f" es una función, se cumple: $\lim\limits_{x\to a} c\, f(x) = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$
- Si f y g son funciones se cumple: $\lim\limits_{x\to a} f(x) \pm g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, g(x) \neq 0$$

Ejercicios generales sobre cálculo de límites:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 5x - 6}$

2) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3}$

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 - 8}{x^3 - 8}$

4) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 5x}{x^2 + 5x - 50}$

5) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3 + x^2 - 10x - 12}{6x^2 + 13x - 15}$

6) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3 + x - 30}{x^3 - x^2 - 18}$

7) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{7x^2 + 9x - 130}{6x^2 + 9x - 105}$

8) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{5x^2 - 8x - 256}{x^2 - 64}$

9) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 + 3x - 10}$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4 - x^3}{x^3 - x^2}$

11 $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{7x^2 + 9x - 130}{6x^2 + 9x - 105}$

12. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{5x^2 - 8x - 256}{x^2 - 64}$

13. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 + 3x - 10}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4 - x^3}{x^3 - x^2}$

15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}$

16. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 6x^2 + 12x - 7}$

17. $\lim_{x\to 2}\dfrac{3x^2+x-14}{x^2-x+2}$

18. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x-6}{x-3}$

19. $\lim_{x\to 4}\dfrac{3x-12}{5x-20}$

20. $\lim_{x\to 5}\dfrac{x^2-11x+30}{x-5}$

Calcular los siguientes límites con radicales.

1) $\lim_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{7x+1}-6}{x-5}$

2) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}$

3) $\lim_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9x+28}-10}{x^2-64}$

4) $\lim_{x\to 10}\dfrac{2x-20}{\sqrt{5x-1}-7}$

5) $\lim_{x\to 6}\dfrac{x^2-5x-6}{\sqrt{11x-4}-8}$

6) $\lim_{x\to 12}\dfrac{x^2-144}{\sqrt{x+13}-5}$

7) $\lim_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{3x-2}-5}{\sqrt{2x+7}-5}$

8) $\lim_{x\to 13}\dfrac{\sqrt{3x+61}-10}{\sqrt{5x-1}-8}$

Calcular los siguientes límites al infinito

1) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x^2+7x-1}{4x^3+8x^2-x-4}$

2) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-x+8}{4x^2+5x-7}$

3) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+9}{x^4+x^3-7}$

4) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+x^3+x^2-8}{5x-9}$

5) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x-11}{3x^3+5x^2-11x-13}$

6) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-6x-5}{3x^3+3x^2-9x+13}$

7) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{5x+12}{10x-13}$

8) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+x+4}{7x^2+21x-3}$

9) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-3}{8x^2+2x-1}$

10) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x^2-x+1}{5x^2+5x-3}$

Calcular los siguientes límites de funciones exponenciales

1. $\lim_{x \to \infty} 3^{x+2}$ 2. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ 3. $\lim_{x \to \infty} 4^{2x}$

Calcular los siguientes límites de funciones logarítmicas

1. $\lim_{x \to \infty} \log\left(x^2 - 9\right)$ 2. $\lim_{x \to 3^+} \log\left(x^2 - 9\right)$ 3. $\lim_{x \to -3^-} \log\left(x^2 - 9\right)$

Referentes bibliográficos

Leithold, L., (1987). *Cálculo con Geometría Analítica.* Editorial Harla. Méjico.
Leithold, L., (1999). *El Cálculo, 7 ed.* Oxford University Press. Méjico.
Stewart, J., (2001). *Cálculo, Conceptos y contextos.* International Thomson Editores. México.
Stewart, J.; Redlin,l.; Watson,S., (2001). *Precálculo*. Tercera Edición. Thomson Learning. México.
Sullivan, M., (1997). *Precálculo*. Cuarta Edición. Pearson Educación. México.
Swokowski, E., (1987). *Introducción al Cálculo con Geometría Analítica.* Grupo Editorial Iberoamérica. Méjico.
Thomas, G. y Finney, R., (1998). *Cálculo, una variable.* Addison Wesley Longman. Méjico.