Prof. Enrique Mateus-Nieves
Post-PhD in Advanced Mathematics

Matrices

Si analizamos el método de eliminación ya estudiado podríamos buscar una forma de escribir un sistema lineal sin tener que mantener las incógnitas. Definimos un objeto matemático denominado "*matriz*", que nos permite hacer precisamente esto: escribir sistemas lineales de una manera compacta que facilite la automatización del método de eliminación, inclusive con el uso de un procesador, dándonos un procedimiento rápido y eficaz para determinar las soluciones.

Definición: Una **matriz** *A* de *m* × *n* es un arreglo rectangular de *mn* números reales (o complejos) ordenados en *m* **filas** (renglones**)** horizontales y *n* **columnas** verticales:

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{fila (renglón) } i \\ \\ \\ \end{array} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow \text{ columna } j & \end{array}$$

Tipos de matrices

Matriz fila: está constituida por una sola fila. $[1\ 4\ {-5}]$

Matriz columna: tiene una sola columna. $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

Matriz rectangular: tiene distinto número de filas que, de columnas, siendo su dimensión $m\ x\ n$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada: tiene el mismo número de filas que de columnas. Los elementos de la forma a_{ii} constituyen la diagonal principal. la diagonal secundaria la forman los elementos con $i + j = n + 1$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz nula: en una matriz nula todos los elementos son ceros.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior: en una matriz triangular superior los elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros.

$$\begin{bmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior: todos los elementos situados por encima de la diagonal principal son ceros.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal: todos los elementos situados por encima y por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Matriz escalar: es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.

$$\begin{bmatrix} 7 & 10 & -2 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 20 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz identidad o unidad: es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales a 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 20 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz traspuesta: dada una matriz A, se llama matriz traspuesta de A a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Matriz regular: es una matriz cuadrada que se puede invertir, es decir, tiene inversa. Por lo tanto, su determinante es diferente de cero.

Ej. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ al calcular su determinante: $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$ que es diferente de cero, por tanto, la matriz es regular.

Ejemplo de matriz regular o invertible 3×3

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ al calcular su determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (3+0+0) - (5+0+9) = 3 - 14 = -11 \neq 0$. Como el determinante de la matriz de orden 3 da como resultado diferente de 0, se trata de una matriz regular.

Matriz idempotente: es una matriz que es igual a su cuadrado, es decir: la matriz A es idempotente si $A = A^2$, que es válido, para cualquier valor natural de *n* (valor entero, no negativo, ni nulo).

Ej. La matriz cuadrada de dimensión 2×2 es idempotente veamos por qué:

$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$, su cuadrado es $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ el resultado es idéntico, lo que demuestra que se trata de una matriz idempotente.

Ej. de una matriz idempotente 3×3

$C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$, Para verificar que realmente corresponde una matriz idempotente elevamos la matriz al cuadrado. $C^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ como el resultado es el mismo que la matriz original, demuestra la idempotencia de la matriz.

Fórmula para los matrices idempotentes: $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{bmatrix}$ con $a^2 + bc = a$. De manera que los elementos de la diagonal secundaria de una matriz idempotente pueden ser cualesquiera mientras se cumpla la condición $a^2 + bc = a$ y los números de la diagonal principal deben ser a y $1 - a$. Además de todas las matrices descritas por esta fórmula, hay que anexar la matriz Identidad, que también es una matriz idempotente pese a no cumplir con la fórmula.

Matriz involutiva: es una matriz cuadrada (tiene igual número de filas que de columnas) que es su propia inversa. Veamos ejemplos:

a. $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ entonces $C \cdot C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

b. $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ entonces $C \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & -1+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

c. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ entonces $A \cdot A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1+3 & \sqrt{3}-\sqrt{3} \\ \sqrt{3-\sqrt{3}} & 3+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

Matriz simétrica: una matriz simétrica es una matriz cuadrada que es igual a su traspuesta: $A = A^T$

Ejemplo de matriz simétrica de orden 2×2: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Ejemplo de matriz simétrica de dimensión 3×3: $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Ejemplo de matriz simétrica de tamaño 4×4: $= \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 9 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 8 & 4 \\ 9 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

Al trasponer estas tres matrices se comprueba que son simétricas, porque las matrices traspuestas son equivalentes a sus respectivas matrices originales.

Matriz antisimétrica o hemisimétrica: una matriz antisimétrica o hemisimétrica es una matriz cuadrada que verifica: $A = -A^T$

Ej. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ entonces $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ por tanto $-A^T = A$

Ej. 2. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 6 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ entonces $A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & -6 \\ -8 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ por tanto $-A^T = A$

Las matrices antisimétricas presentan las siguientes propiedades:

- Son matrices cuadradas
- Los valores de su diagonal principal son todos iguales a 0
- Toda matriz cuadrada se puede descomponer en la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica

Matriz ortogonal: una matriz es ortogonal si verifica que: $A.A^T = I$. Otra manera de explicar el concepto de matriz ortogonal es mediante la matriz inversa, porque *la matriz traspuesta (o transpuesta) de una matriz ortogonal es igual a su inversa.*

Es posible demostrar fácilmente que la matriz invertida de una matriz ortogonal es equivalente a su traspuesta mediante la condición de matriz ortogonal y la propiedad principal de las matrices inversas:

$$A^T = A^{-1} \rightarrow \begin{cases} A.A^T = I \\ A \cdot A^{-1} \end{cases}$$

Por lo que una matriz ortogonal siempre será una *matriz invertible*, o dicho de otra forma, será una matriz regular o no degenerada.

Ej. 1 para una matriz ortogonal de dimensión 2×2: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ Se puede comprobar que es ortogonal calculando el producto por su traspuesta: $A.A^T$, veamos:

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como el resultado da la matriz Idéntica, esto prueba que A es una matriz ortogonal.

Ej. 2 para una matriz ortogonal de dimensión 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se demuestra que es ortogonal multiplicando la matriz A por su traspuesta, veamos:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como la solución es la matriz Unidad, demuestra que A es una matriz ortogonal.

Matriz escalonada: Una matriz es escalonada si al principio de cada fila (o columna) un elemento nulo más que en la fila (o columna) anterior.

Una matriz se llama escalonada por renglón eso simplemente escalonada si cumple con las siguientes propiedades:

1. Todos los renglones cero están en la parte inferior de la matriz.
2. El elemento delantero de cada renglón diferente de cero está a la derecha del elemento delantero diferente de cero del renglón anterior.

Ej. De matrices escalonadas. En cada renglón diferente de cero la primera entrada diferente de cero está marcada con el color verde.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Definición de matriz escalonada en términos de los números r y p_i. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$. Denotemos por r al número de los renglones no nulos de A:

$$r := \left|\left\{i \in \{1,\ldots,m\}:\ A_{i,*} \neq \mathbf{0}\right\}\right|,$$

y en cada renglón no nulo denotemos por p_i al índice de la primera entrada no nula:

$$p_i := \min\left\{j \in \{1,\ldots,n\}:\ A_{i,j} \neq 0\right\} \qquad (i \in \{1,\ldots,m\},\ A_{i,*} \neq \mathbf{0}).$$

La matriz A se llama *escalonada por renglones* (o simplemente *escalonada*) si cumple con las siguientes propiedades:

1. $A_{i,*} \neq \mathbf{0}$ para todo $i \in \{1,\ldots,r\}$, $A_{i,*} = \mathbf{0}$ para todo $i > r$;
2. $p_1 < \ldots < p_r$.

Definición (matriz escalonada reducida). Una matriz se llama escalonada reducida por renglones o simplemente escalonada reducida si cumple con las propiedades 1 y 2 y además con las siguientes propiedades 3 y 4: En cada renglón no nulo el elemento delantero diferente de cero (“pivote”) es igual a uno

$$\forall i \in \{1,\ldots,r\} \qquad A_{i,p_i} = 0.$$

- Todos los elementos por encima de los pivotes son nulos:

$$\forall i \in \{2,\ldots,r\} \qquad \forall k \in \{1,\ldots,i-1\} \qquad A_{k,p_i} = 0.$$

9. Ejemplos de matrices escalonadas reducidas.

$$\begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 5 & -6 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}.$$

Eliminación de Gauss

Proposición (eliminación de Gauss). Cualquier matriz $A \in M_{m\,x\,n}(\mathbb{F})$ se puede transformar en una matriz escalonada por renglones al aplicar operaciones elementales de tipos $Rp \mathrel{+}= \lambda Rq$ con $p > q$ y $Rp \leftrightarrow Rq$.

Demostración. Describamos un algoritmo que transforma la matriz dada A en una matriz escalonada. Este algoritmo se llama eliminación de Gauss. En el k-ésimo paso del algoritmo supongamos que:

i. Las primeras $k-1$ filas son no nulas;

ii. Los índices de los elementos delanteros en estas filas cumplen con la propiedad $p_1 < p_2 < \cdots < p_{k-1}$,

iii. $A_{i,p_{k-1}} = 0$ para todo $i \geq k$.

Consideremos dos casos.

I. Todas las filas de A, a partir de la k-ésima, son nulas: $A_{ij} = 0$ para todo i ∈ $\{k, \ldots, m\}$ y todo *j* *∈{1, . . . , n}*. En este caso *r = k − 1,* y el algoritmo se termina.
Sean $q \coloneqq \min\{j \in \{1, \cdots, n\}: \exists i \in \{k, \cdots, m\}\ A_{ij} \neq 0\}$,
$p \coloneqq \min\{i \in \{k, \cdots, m\}: A_{iq} \neq 0\}$
La condición *iii)* garantiza que $p_k \coloneqq q > p_{k-1}$. Si se aplica la operación elemental $R_k \leftrightarrow R_p$. Después de esta operación, $A_{kq} \neq 0$.
Usando las operaciones elementales $R_i + \frac{A_{i,q}}{A_{k,q}} R_k$, se eliminan los elementos por debajo del elemento *(k, q)*. Ahora la matriz cumple con las propiedades *i), ii), iii)* con *k* en lugar de *k − 1*. Continuando el proceso obtenemos una matriz escalonada.

Eliminación de Gauss-Jordán. En el k-ésimo paso se eliminan no sólo los elementos A_{ip_k} con *i > k*, sino también A_{ip_k} con i < k.

Ejemplo. Transformemos la siguiente matriz a una matriz escalonada:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -7 & 3 \\ 5 & -4 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & -23 & 16 \end{bmatrix}.$$

Apliquemos el método de Gauss. Cada vez eligimos como pivote al elemento el más izquierdo y el más alto. En el primer paso usamos como pivote el elemento $A_{1,1} = 3$.

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -7 & 3 \\ 5 & -4 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & -23 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 -= R_3]{\substack{R_2 += \frac{1}{3}R_1 \\ R_3 -= \frac{5}{3}R_1}} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{3} & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -27 & 16 \end{bmatrix}.$$

En el segundo paso tenemos que intercambiar dos filas.

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{3} & 3 \\ 0 & 1 & -27 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 -= R_2} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{3} & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{85}{3} & 15 \end{bmatrix}.$$

Y un paso más:

$$\xrightarrow{R_4 - 5R_3} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora la matriz es escalonada, $r = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$.

Solución de sistemas de ecuaciones lineales cuyas matrices son escalonadas reducidas

Ejemplo. Resolver el sistema de ecuaciones lineales con la siguiente matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

La matriz es escalonada reducida. Podemos utilizar la primera ecuación para despejar la incógnita x_1, la segunda ecuación para despejar x_3 y la tercera para x_4:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - 5x_5 - 3; \\ x_3 = 2x_5 + 4; \\ x_4 = -4x_5 + 2. \end{cases}$$

La solución general es

$$x = \begin{bmatrix} 2x_2 - 5x_5 - 3 \\ x_2 \\ 2x_5 + 4 \\ -4x_5 + 2 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicios sobre matrices

1. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a. Clasifique cada una de las matrices del punto 1.
b. Encuentre la matriz traspuesta de las matrices *A*, *B* y *C*.
c. Las matrices *A, b y C* ¿tienen inversa? Justifique su respuesta. En caso afirmativo encuéntrenla.

2. Sean las matrices A, B, C y D.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

a. Clasifique cada una de las matrices del punto 1.
b. Encuentre la matriz traspuesta de las matrices *A*, *B* y *C*.
c. Las matrices *A, b y C* ¿tienen inversa? Justifique su respuesta. En caso afirmativo encuéntrenla.

Referentes bibliográficos

1. Grossman S, Flores J. (2012). *Álgebra Lineal*, Séptima edición. Mc Graw Hill.
2. Poole, D. (2011.) *Álgebra Lineal. Una Introducción Moderna.* Cengage.
3. Larson, L. (2015). *Fundamentos de Álgebra Lineal.* Versión Revisada. Cengage.