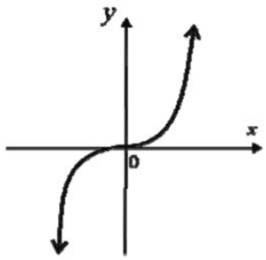
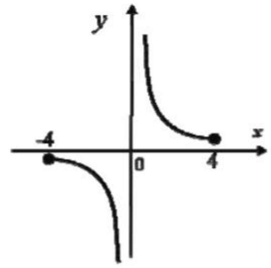
Prof. Enrique Mateus Nieves
PhD in Advanced Math

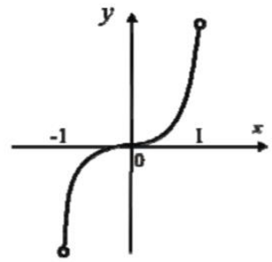
Máximos, mínimos y puntos de inflexión en funciones reales



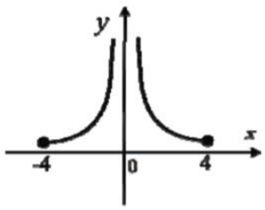
Función continua en R.
No hay ni máximos ni mínimos absolutos.



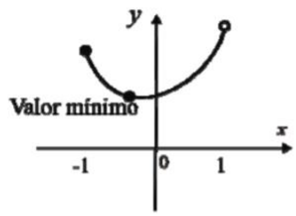
Función discontinua en [-4,4].
No hay ni máximos ni mínimos absolutos.



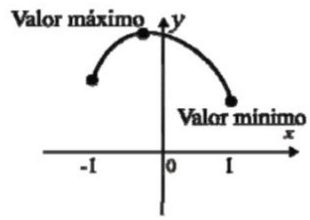
Función continua en el intervalo abierto (-1,1).
No hay ni máximos ni mínimos absolutos.



Función discontinua en [-4,4].
No hay máximo absoluto en este intervalo.
Se alcanza el mínimo en los extremos del intervalo.



Función continua en el intervalo [-1,1).
No hay máximo absoluto.
Se alcanza mínimo absoluto dentro del intervalo.

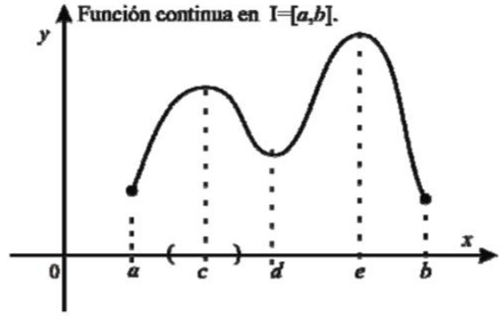


Función continua en el intervalo cerrado [-1,1].
Se alcanza el valor máximo y el mínimo.

Función continua en I=(*a*,*b*).
Se alcanza el valor máximo y el valor mínimo.

EXTREMOS RELATIVOS O LOCALES

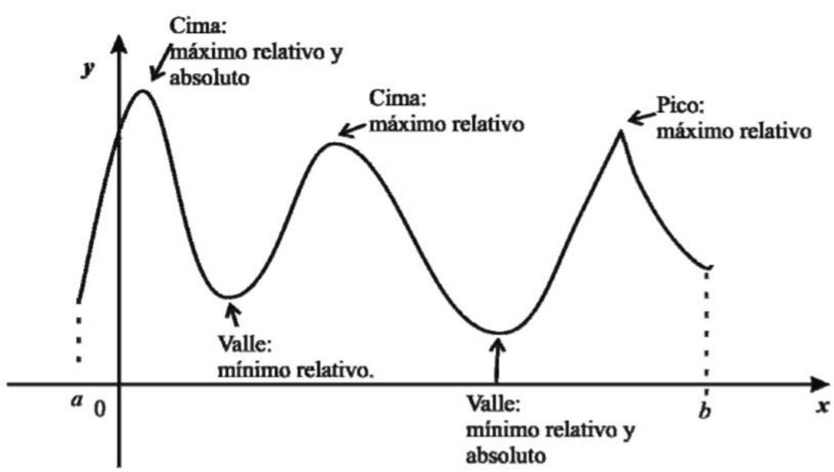
En la figura observamos la gráfica de una función f tal que $f(e)$ es el valor máximo absoluto de f. El valor $f(c)$ no es el máximo absoluto, sin embargo podemos apreciar un intervalo abierto que contiene a c tal que $f(c)$ es el valor máximo absoluto de la función en ese intervalo. Este valor es un valor característico de la función y nos referiremos a él como un valor máximo relativo o local de la función. De manera similar hablaremos de un valor mínimo relativo $f(d)$ si este valor es el mínimo que tiene $f(x)$ para x cercanos a d. A continuación damos la definición formal.



***f*(*e*) es el máximo absoluto de *f* en el intervalo I.**
***f*(*a*) es el mínimo absoluto de *f* en el intervalo I.**
En $x=c$ ocurre un máximo relativo pero no absoluto.

Definición.-

- Una función f tiene **un máximo relativo (o local)** en c si existe un intervalo abierto I en el dominio de f que contiene a c tal que $f(c)$ es el valor máximo absoluto en el intervalo.
- Una función f tiene **un mínimo relativo (o local)** en c si existe un intervalo abierto I en el dominio de f que contiene a c tal que $f(c)$ es el valor mínimo absoluto en el intervalo.

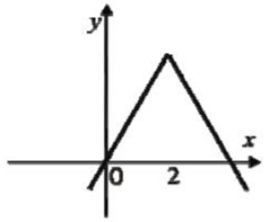


La peculiaridad de estos puntos, por ejemplo las cimas, es que son:

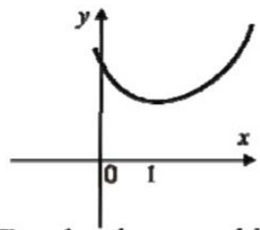
1.- Cimas suaves, sin picos. En este caso la recta tangente es horizontal o

2.- Cima en forma de pico o angulosa, en este caso no hay derivada en ese punto.

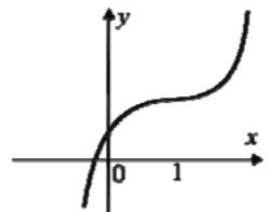
Observación.- En un punto crítico puede haber o no un extremo relativo.



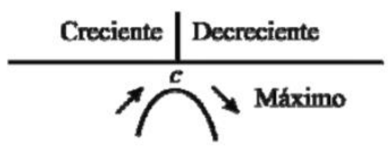
En x=2 se alcanza un máximo relativo.
En este caso $f'(2)$ no está definida.

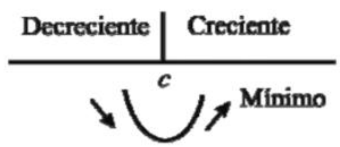


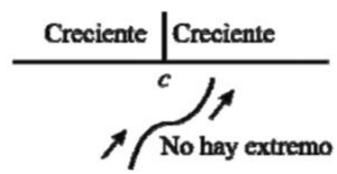
En x= 1 se alcanza un mínimo relativo.
En este caso $f'(1)$=0.



En x=1 no se alcanza ni un máximo ni un mínimo relativo.
En este caso $f'(1)$=0.



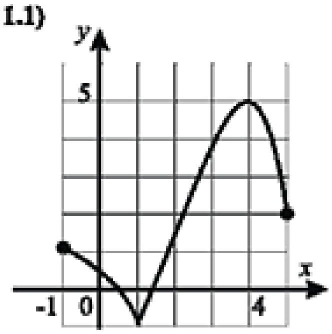




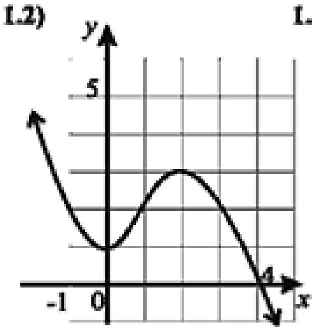
EJERCICIOS

1) Dada la gráfica de la función, estime los intervalos de crecimiento, decrecimiento, donde se alcanza los máximos y mínimos relativos. Estime además los puntos de cortes con los ejes y el dominio de la función.

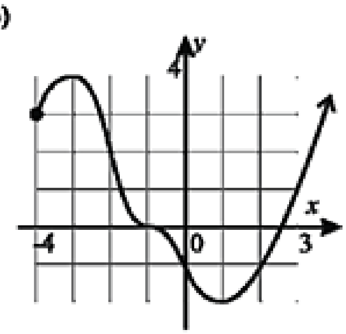
I.1)



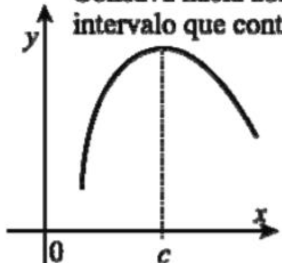
I.2)



I.3)

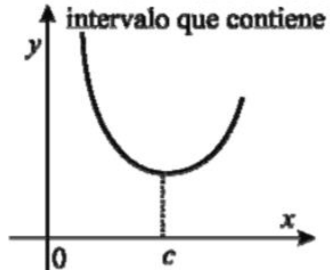


Cóncava hacia abajo en un intervalo que contiene a c.

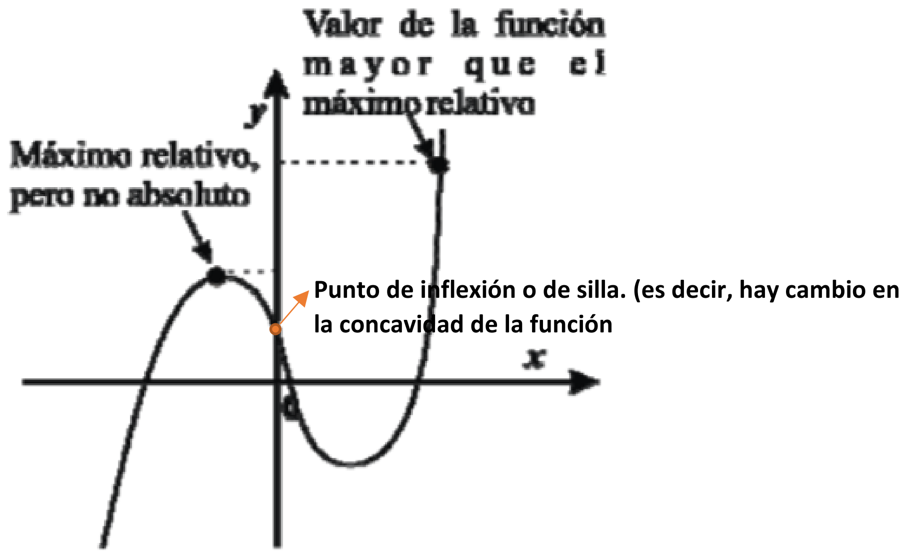


$f'(c)$=0
$f(c)$ es un máximo relativo

Cóncava hacia arriba en un intervalo que contiene a c.



$f'(c)$=0
$f(c)$ es un mínimo relativo



APLICACIONES

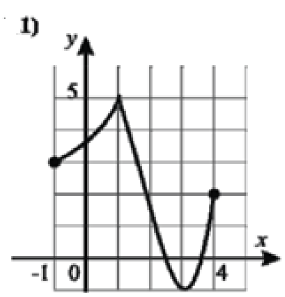
En muchos problemas de la vida real y de economía se quiere conseguir el valor máximo o mínimo de una cantidad que depende de la variable independiente la cual tiene restringido sus valores a un intervalo cerrado.

Ejemplo 5.- Una fábrica que elabora un producto tiene una capacidad de producción de 3.000 unidades al mes. La función de utilidad por producir y vender q unidades mensuales está dada por

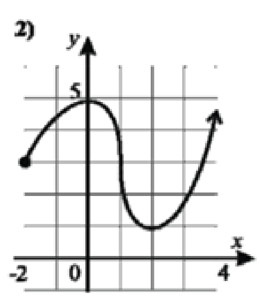
$$U(q) = -100.000 + 60.000q + 985q^2 - \frac{1}{3}q^3 .$$

Encuentre el nivel de producción que maximiza la utilidad mensual.

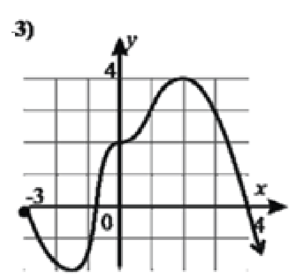
1) Usando la gráfica de la función, determine **a)** los valores críticos y explique la naturaleza de cada valor crítico; **b)** los extremos absolutos y relativos de la función y donde se alcanzan.



f definida en [-1,4]



f definida en [-2,∞)



f definida en [-3,∞)