Propiedades de la Potenciación y Radicación en los reales

Fundamentos de matemáticas

Para recordar:

Propiedades básicas de las potencias

Producto

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Cociente

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Inverso

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

Potencia

$\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$

Exponente negativo

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

Inverso

$\frac{1}{a^{-1}} = a$

Nota: A la hora de aplicar las propiedades del producto y del cociente de potencias, no olvidemos que las bases de las potencias tienen que ser ***iguales***.

Otras propiedades

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\quad\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\quad a^0 = 1$

Una potencia con *base positiva* siempre es positiva. Ej. $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

Cuando la *base es negativa*, el signo depende si el exponente es par o impar:

- Si el exponente es *par*, el resultado es positivo. Ej. $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$
- Si el exponente es *impar***,** el resultado es negativo. Ej. $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-8)$.

Cuando el *exponente es par*, podemos agrupar sus factores de dos en dos, siendo positivos estos productos. Ej. $(-2)^4 = [(-2) \cdot (-2)] \cdot [(-2) \cdot (-2)] = 4.4$=16

Cuando el *exponente es impar*, queda un factor negativo que no podemos agrupar, lo que hace que la respuesta sea negativa. Ej. $(-3)^3 = [(-3) \cdot (-3)] \cdot (-3) = 9 \cdot (-3) = -27$.

Importante: Cuando una base es negativa, siempre tenemos que escribirla entre *paréntesis*. Si no hay paréntesis, se considera que el signo negativo está delante de la potencia, no en la base, cambiando el signo del resultado de la potencia.

Ej. 1. $(-3)^2 = [(-3) \cdot (-3)] = 9$

Ej. 2. La base de la potencia es negativa: $-3^2 = -[3 \cdot 3]^2 = -9$.

Una potencia cuya base es 10 es muy fácil de calcular: el exponente indica el número de ceros (0's) del resultado, delante o detrás del número 1:

- Si el exponente es negativo, los 0's van detrás del 1:

$$10^1 = 10$$
$$10^2 = 100$$
$$10^3 = 1000$$
$$10^4 = 10000$$

- Si el exponente es positivo, los 0's van delante del 1:

$$10^{-1} = 0{,}1$$
$$10^{-2} = 0{,}01$$
$$10^{-3} = 0{,}001$$
$$10^{-4} = 0{,}0001$$

Taller

1. Calcular las siguientes potencias:

a. $(-3)^4 =$ b. $(-3)^4 =$ c. -2^2 d. $(-1)^{113} =$

e. $(-1)^{110} =$ f. $(2^2)^{-3} =$ g. $(0.5)^2 =$ h. $(-8)^{\frac{1}{3}} =$

i. $2^3 \cdot 3^3 =$ j. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 =$ k. $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 =$ l. $\left(\frac{-3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^{-3} =$

m. $((2)^{-4})^{-1} =$ n. $2^2 \cdot 3^4 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-2}$ o. $\frac{3^4 \cdot 4^2}{3^5 \cdot 4^2} =$ p. $\frac{2^4 \cdot 4^{-2}}{2^5 \cdot 4^{-2}} + \frac{3^4 \cdot}{3^5} =$

q. $\left(\frac{2}{6}\right)^{-2} =$ r. $\left(\frac{1}{62}\right)^{-3} . \left(\frac{2}{6}\right)^{-3} =$

2. Justifique sus respuestas
   a. ¿es mayor 0,5 que $(-0{,}5)^2$?
   b. ¿es menor 0,5 que $(-0{,}5)^2$?
   c. ¿el resultado de calcular $(-1)^5$ es igual que al calcular $(-1)^{1025}$? ¿Por qué?

d. Al calcular $(-2)^{-2}+(-2)^{3}$ ¿el resultado es negativo? ¿por qué?

3. Simplificar las siguientes expresiones:

a. $\dfrac{2^3\cdot 5^4\cdot 2^{-1}\cdot 5^2}{5^3\cdot 2^{-2}\cdot 5^3\cdot 2^4}$

b. $\dfrac{2^4\cdot 3^4}{6^2}$

c. $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-1}$

d. $\left(\dfrac{2}{3^2}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{2^2}{3^3}\right)$

e. $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{10}\cdot\left(\left(\dfrac{5}{4}\right)^{5}\right)^{-2}$

f. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$

g. $\dfrac{5\cdot(3^2\cdot 10)^2}{3^2\cdot 60^2}$

h. $3\cdot\left((2\cdot 3)^{-1}\cdot\dfrac{1}{2^3}\right)^{-1}\cdot(3\cdot 2^2)^{-2}$

i. $\left(1-2\cdot\left(\dfrac{2^4}{5}\right)^{-1}\cdot\dfrac{2^3}{5}\right)^{100}$

j. $(3^2)^3\cdot(2\cdot 3^5)^{-2}\cdot(18)^2$

k. $\left(\dfrac{\left(2\cdot\frac{3}{9}:3\right)^{-2}}{\left(\frac{9}{4}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}}\right)^{-1}$

l. $(-\mathbf{1})^{-\mathbf{5}},\quad(-\mathbf{2})^{-\mathbf{3}}$

m. $\dfrac{a^2(2^3\cdot c^{-2})}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{3}\right)^{-2}}-2\left(\dfrac{c}{(a^2\cdot 2^{-1})^2}\right)^{-2}$

n. $2^3+2^{-2}=$

o. $-2^3-2^4\cdot 2^2=$

p. $\left(\dfrac{2^3}{a^2}:\dfrac{c^3}{3^2}\right)^{-2}$

q. $\left(\left(\dfrac{c^3}{a^2}\right)^{-1}:\left(\dfrac{1}{b^{-1}}\right)\right)^{-1}$

r. $\dfrac{\mathbf{2^2\cdot 3^3\cdot 5^7}}{\mathbf{3^2\cdot 5^6\cdot 2^2}}$

4. Calcula las siguientes potencias de potencias

a. $(7^2)^3=$

b. $(-2^3)^{-2}=$

c. $((-3)^2)^2=$

d. $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^{-2}=$

e. $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)^{-3}=$

f. $\left(\left(\frac{3}{5}\right)^3\right)^{-1}=$

g. $\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

h. $\left(-\frac{3}{5}\right)^5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{-3}=$

i. $\left(\frac{7}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{-3}=$

5. Escribir los siguientes números como productos de potencias cuyas bases sean números primos: 56, 60 y 90.

6. Simplificar la siguiente operación entre potencias escribiendo las bases como productos de números primos: $\frac{6^2 \cdot 20^2 \cdot 125}{25^2 \cdot 2^3 \cdot 12^2} =$

7. Reducir aplicando las propiedades de la potencia, las siguientes expresiones

a. $((2 \cdot 3)^{-3})^{\frac{2}{3}} =$ b. $\frac{2^3}{3} \cdot (4^{-2}) =$ c. $\left(\frac{5}{3}\right)^2 \div \left(\frac{2}{6}\right)^{-2} \cdot \frac{2}{8} =$

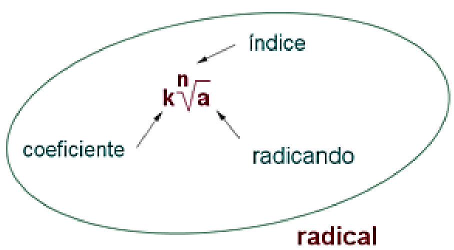
Segunda parte

Propiedades de los radicales

Los radicales poseen muchas formas equivalentes que nos ayudan a plantear problemas de forma diferente. Para ello, es necesario conocer las *propiedades de los radicales* que nos permitirán realizar diferentes operaciones que nos conducirán a un resultado final.

Los radicales se usan para encontrar bases en una potencia. Si $a^n = b \ \rightarrow ?^n = b \leftrightarrow \sqrt[n]{b} = a$

Partes de un radical



Propiedades de las raíces

Las propiedades de los radicales permiten resolver operaciones que involucran radicales. Las propiedades de los radicales también se usan para simplificarlos hasta la forma más sencilla.

Propiedad	**Fórmula**	**ejemplo**
Producto de raíces iguales	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{(a\cdot b)}$	$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{(4\cdot 2)}=\sqrt[3]{8}=2$
División de radicales iguales	$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\left(\frac{5}{2}\right)}=\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{2}}$
Raíz de una raíz	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}}=\sqrt[6]{64}=2$
Raíz de una potencia	$\sqrt[n]{a^n}=a$	$\sqrt[3]{4^6}$=16
Potencia de una raíz	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$	$\left(\sqrt[3]{27}\right)^2=\sqrt[3]{27^2}=9$

Ejercicios

1. Exprese como radical las siguientes potencias

   a. $4^{\frac{1}{2}}=$ b. $10^{\frac{10}{3}}=$ c. $16^{\frac{3}{2}}=$

   d. $8^{\frac{2}{3}}=$ e. $81^{0.75}=$ f. $8^{0,\bar{3}}=$

2. Calcule los siguientes radicales a su mínima expresión:

   a. $\sqrt{2\cdot 3^2\cdot 5^2}=$ b. $\sqrt[4]{2^7\cdot 3^{14}\cdot 5^4}$= c. $2^2\cdot 4\cdot\sqrt[3]{8}=$

   d. $\sqrt[3]{2^2\cdot 3^2}=$ e. $\sqrt[4]{2^2\cdot 3^3}=$ f. $\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[3]{27}=$

3. Realice las operaciones aplicando las propiedades de los radicales

   $\boldsymbol{a)}\left(\sqrt[7]{\mathbf{5}}\right)^{\mathbf{3}}$ $\boldsymbol{b)}\sqrt[3]{\sqrt[4]{\mathbf{3}}}$ $\boldsymbol{c)}\left(\sqrt[3]{\sqrt{\mathbf{2}}}\right)^{\mathbf{5}}$

   $\boldsymbol{d)}\sqrt[8]{\mathbf{7^6}}$ $\boldsymbol{e)}\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{\mathbf{5}}}}\right)^{\mathbf{6}}$ $\boldsymbol{f)}\ \sqrt[3]{\mathbf{3}}\cdot\sqrt[3]{\mathbf{5}}$

   $\boldsymbol{g)}\sqrt[3]{\mathbf{2}}\cdot\sqrt[4]{\mathbf{7}}$ $\boldsymbol{h)}\ \frac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$ $\boldsymbol{i)}\ \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\sqrt[3]{\mathbf{5}}}$

4. Realice los productos indicados, usando las propiedades paso a paso

   a. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}=$ b. $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}=$ c. $\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}=$

   d. $\sqrt{12}\cdot\sqrt[3]{36}=$ e. $\sqrt[3]{125}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{32}=$ f. $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{648}=$

g. $\sqrt[4]{18^4} =$ h. $\sqrt[3]{27 \cdot 30} =$ i. $\sqrt[5]{24 \cdot 16} =$

j. $\sqrt[7]{62 \cdot 20} =$ k. $\sqrt[9]{63 \cdot 98} =$ l. $\frac{\sqrt[4]{76}}{\sqrt[6]{115}} =$

m. $\frac{\sqrt[8]{49}}{\sqrt[6]{90}} =$ n. $\frac{\sqrt[12]{180}}{\sqrt[6]{300}} =$ ñ. $\frac{\sqrt[4]{66}}{\sqrt[6]{150}} =$

o. $\frac{\sqrt{15^2 \cdot \sqrt[3]{25^9}}}{\sqrt{16} \cdot \sqrt[3]{14}} =$ p. $\frac{\sqrt[5]{18^4} \cdot \sqrt[6]{20^7}}{\sqrt[8]{22^5} \cdot \sqrt[6]{44^3}}$ q. $\frac{\sqrt[7]{28^6} \cdot \sqrt[8]{66^5}}{\sqrt[13]{87^8} \cdot \sqrt[8]{50^2}}$

r. $\frac{\sqrt[9]{55^8} \cdot \sqrt[10]{61^3}}{\sqrt[18]{78^{11}} \cdot \sqrt[10]{72}}$ s. $\frac{\sqrt[3]{27 \cdot 30}}{\sqrt[5]{24 \cdot 16}}$ t. $\frac{\sqrt[7]{62 \cdot 20}}{\sqrt[9]{63 \cdot 98}}$

5. Efectúe las operaciones de radicales usando las propiedades paso a paso

a. $\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} =$ b. $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} =$ c. $\frac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}} =$

d. $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{4}}{\sqrt{48}} =$ e. $\frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt[4]{6}} =$ f. $\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a^4}} =$

g. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} =$ h. $(\sqrt[3]{18})^2 =$ i. $\left(\frac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4 =$

j. $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} =$ k. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}}} =$ l. $\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{5^2}}}\right)^6 =$

6. Ejercicios con suma de radicales

a. $2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} =$ b. $3\sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5} =$ c. $\sqrt{12} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{75} =$

d. $\sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} - \sqrt[12]{64} =$ e. $2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + \sqrt{27} =$ f. $\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486} =$

g. $2\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80} =$ h. $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} =$

7. Sumas con radicales como denominadores

a. $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} =$ b. $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} + \sqrt[6]{4} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} =$

Jerarquía al resolver radicales

Estudie detenidamente el siguiente ejercicio resuelto que le ayudara a comprender cómo jerarquizar radicales.

Calcular $\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\frac{1}{8}}}} =$

Solución: Primero, notemos que $\frac{1}{8}=2^{-3}$, por lo tanto, elevamos al cubo el denominador y realizamos la división de potencias con la misma base, luego realizamos la raíz cuarta del radical multiplicando los índices, veamos:

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\frac{1}{8}}}} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2^{-3}}}} = \sqrt[4]{\sqrt[6]{\frac{2^2}{(2^{-3})^3}}} = \sqrt[4]{\sqrt[6]{\frac{2^2}{2^{-9}}}} = \sqrt[4]{\sqrt[6]{2^{11}}} = \sqrt[24]{2^{11}} \ \text{¤}$$

8. Basados en el ejercicio resulto calcular:

a. $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{\sqrt[3]{3^5}}{4^5}}} =$ b. $\sqrt{\sqrt[4]{\frac{8^{-1/3}}{2^4}}} =$ c. $\frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}}}{\sqrt{\sqrt[3]{2^3}}} + \sqrt{\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[3]{64}-\sqrt{16}}} =$

d. $\frac{\sqrt{2\cdot 4^3\cdot 8^{-4}}}{8\sqrt{3\cdot 6^2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{625}}} =$ e. $\sqrt{\frac{\sqrt[7]{a^2\cdot a^{-3}}}{(a\cdot b)^5}} =$ f. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{(a\cdot b)^{-2}}} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{a}} =$

Binomios y radicales

9. Realizar las operaciones:

a. $(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2$ b. $(2-\sqrt{3})^2$

c. $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$ d. $(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})$

Racionalización de radicales

la *racionalización de radicales* es un proceso en el que se transforma una expresión, regularmente, una *fracción* con *raíz* en el denominador, a otra equivalente sin raíz en el denominador. También se conoce como ***racionalizar una fracción con raíces en el denominador.*** Consiste en operar para eliminar los radicales del denominador de una fracción. Para ello se multiplica el numerador y el denominador por otra expresión de forma que, al operar, se elimine la raíz del denominador. Cabe resaltar que la expresión a racionalizar puede tener la raíz con índice mayor que dos (por ejemplo, raíz cúbica), cantidad subradical puede ser un monomio, binomio, etc, y que la expresión obtenida equivalente puede o no presentar raíces en el numerador.

Racionalización de un monomio

Se debe multiplicar el numerador y denominador de la fracción por la raíz del denominador cuyo radicando se eleva a la diferencia entre el índice y el exponente. En el siguiente caso, Ej. Racionalizar

$\frac{3}{\sqrt{x}}$ se debe multiplicar por 1 expresado en forma de cociente que involucre el radical dado, esto es: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ tenemos:

$\frac{3}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2}$ al aplicar las propiedades de los radicales tenemos: $\frac{3\sqrt{x}}{x}$

Racionalización de binomio

Para racionalizar un binomio, se debe hacer un proceso similar al ejercicio anterior, multiplicar el numerador y denominador de la fracción por la *expresión conjugada* del denominador de la misma. En el siguiente ejemplo: racionalizar la expresión: $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. Se debe multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador. Esto es por 1. El resultado obtenido es un producto notable de los binomios conjugados. Veamos:

$$\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = 5\sqrt{3}-5\sqrt{2}.$$

El caso general de un binomio con dos raíces cuadradas también es fácilmente resoluble:

$$\frac{1}{a\sqrt{p}+b\sqrt{q}} = \frac{1}{a\sqrt{p}+b\sqrt{q}} \cdot \frac{b\sqrt{q}-a\sqrt{p}}{b\sqrt{q}-a\sqrt{p}} = \frac{b\sqrt{q}-a\sqrt{p}}{b^2q-a^2p}$$

Racionalización de monomios con índices mayores que dos

Cuando se tiene numeradores y denominadores fraccionados y multiplicados por índices mayores o iguales a 3.

Ej. $\frac{2}{\sqrt[5]{8a^3b^4}}$ Primero, todas las cantidades subradicales (si son números enteros elevados que no tienen exponente) se les debe obtener la raíz enésima.

$$\frac{2}{\sqrt[5]{8a^3b^4}} = \frac{2}{\sqrt[5]{2^3a^3b^4}}$$

Ahora, la cantidad que deberá ser multiplicada al numerador y denominador de la fracción sigue un procedimiento diferente a las anteriores. Las cantidades exponenciales de los subradicales del radical para multiplicar al numerador y denominador de la fracción será el número del exponente que falta para acercarse al índice del radical. En caso de que el exponente sea mayor que el índice de la raíz, la cantidad de aquel exponente será la que falte para llegar al múltiplo más cercano de la raíz. Para: $\sqrt[5]{2^3a^3b^4}$, es $\sqrt[5]{2^2a^2b^1}$, ya que éste es el radical que al ser multiplicado por el denominador los exponentes de las cantidades subradicales serán iguales al índice de la raíz. Ahora, se procede a multiplicar el numerador y el denominador:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{2^3a^3b^4}}\cdot\frac{\sqrt[5]{2^2a^2b}}{\sqrt[5]{2^2a^2b}}=\frac{2\sqrt[5]{2^2a^2b}}{\sqrt[5]{2^5a^5b^5}}$$

Despejando las raíces, que son de índice 5:

$$\frac{2\sqrt[5]{2^2a^2b}}{\sqrt[5]{2^5a^5b^5}}=\frac{2\sqrt[5]{4a^2b}}{2ab}$$

Simplificando, se obtiene:

$$\frac{2\sqrt[5]{4a^2b}}{2ab}=\frac{\sqrt[5]{4a^2b}}{ab}$$

Racionalización de binomios con radical mayor a dos

Cuando se tiene la diferencia de dos radicales de índice 3, es preciso utilizar *productos notables.*

Veamos el caso: $\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ Tomamos este producto notable: $a-b=\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\cdot\left[\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right]$, ahora multiplicamos el numerador y el denominador de la fracción por el segundo factor así:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$$

En el denominador ha quedado el producto notable. Lo cambiamos por su expresión simple y ya está.

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$$

Si se trata de la suma de dos radicales de índice 3:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$$

Hay que usar este otro producto notable.

$$a+b=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left[\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right]$$

Se multiplica el numerador y el denominador de la fracción por el segundo factor.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$$

En el denominador ha quedado el producto notable. Lo cambiamos por su expresión simple y ya está.

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}$$

Para un binomio en general se tiene:

$$\frac{1}{a\sqrt[n]{p}-b\sqrt[n]{q}}=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-1}\cdot\sqrt[n]{p^kq^{n-1-k}}}{a^np-b^nq}$$

Ejercicios

Racionalizar cada expresión indicando el caso usado

a. $\frac{2}{3\sqrt{2}}$ b. $\frac{2}{3\sqrt[5]{4}}$ c. $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ d. $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

e. $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ f. $\frac{2}{4-2\sqrt{2}}$ g. $\frac{2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{6}}$ h. $\frac{5}{2\sqrt{2}}$

i. $\frac{2}{3+\sqrt{3}}$ j. $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ k. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ l. $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

Ejercicio resuelto, racionalizar $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador $\sqrt{2}+\sqrt{3}$*, reducimos paréntesis en el numerador; efectuamos la suma por diferencia en el denominador, por lo que obtenemos una diferencia de cuadrado*

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} &= \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}\\ &= \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}\\ &= \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}\end{aligned}$$

En el denominador extraemos los radicandos y dividimos por -1, es decir, cambiamos el numerador de signo

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} &= \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2-3}\\ &= \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{-1}\\ &= -2\sqrt{2}-2\sqrt{3}\end{aligned}$$ ¤

Referentes bibliográficos

Stewart, J.; Redlin,l.; Watson,S., (2001). *Precálculo*. Tercera Edición. Thomson Learning. México.
Sullivan, M., (1997). *Precálculo*. Cuarta Edición. Pearson Educación. México.
Swokowski, E., (1987). *Introducción al Cálculo con Geometría Analítica.* Grupo Editorial Iberoamérica. Méjico.