

Sistemas de ecuaciones lineales

En los problemas 1 a 12 encuentre las soluciones (si las hay) de los siguientes sistemas dados. En cada caso calcule el valor de $\Delta = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21}$.

1. $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = -8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ -2x - 3y = -3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x + 5y = 0 \\ -2x - y = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -2x = 1 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 7x + 3y = 0 \\ -5x + 10y = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x - 7y = -5 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 7x + 4y = 1 \\ -7x - 4y = -3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 7x + 4y = 0 \\ -7x - 4y = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} -13x + 3y = 7 \\ 5x + 22y = 9 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 9x - 3y = -3 \\ -2x + 4y = 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} -2x + 3y = 3 \\ 2x - 3y = -3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$

En los problemas 13 a 20 encuentre el punto de intersección (si hay uno) de las dos rectas.

13. $-x + 2y = 1; 3x - 5y = 1$

14. $-4x + 2y = 1; 4x - 2y = 1$

15. $-4x + 2y = -1; 4x - 2y = 1$

16. $7x - 3y = -3; -9x + 5y = -2$

17. $-2y - 3x = 7; 5x - 9y = -2$

18. $\sqrt{3}x - \sqrt{5}y = 1; \sqrt{5}x - \sqrt{3}y = 0$

19. $\sqrt{3}x + \sqrt{5}y = 15; \sqrt{3}x - \sqrt{5}y = 15$

20. $\pi x + y = 0; \sqrt{2}x - 5y = -1$

Sea L una recta y L_{\perp} la recta perpendicular L que pasa a través de un punto P . La *distancia* de la recta L al punto P se define como la distancia¹ entre P y el punto de intersección de L y L_{\perp} (Figura 1).

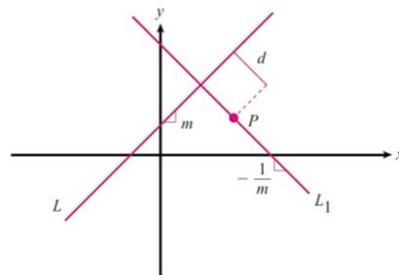


Figura 1. Distancia de la recta L al punto P

¹ Recuerde que si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos en el plano xy , entonces la distancia d entre ellos está dada por $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

En los problemas 21 a 26 encuentre la distancia entre la recta dada y el punto.

21. $2x - 3y = 4$; $(-7, -2)$

22. $-5x + 6y = 2$; $(1, 3)$

23. $2x - 4y = -42$; $(7, -21)$

24. $7x + 5y = 6$; $(0, 0)$

25. $3x + 7y = 0$; $(-2, -8)$

26. $11x - 12y = 5$; $(0, 4)$

27. Encuentre la distancia entre la recta paralela a $-3x + 4y = -5$ y que pasa por el punto $(-1, -1)$, y el punto de intersección de las rectas $-7x + 2y = 4$ y $2x - 8y = -1$.

28. En un zoológico hay aves (de dos patas) y bestias (de cuatro patas). Si el zoológico contiene 60 cabezas y 200 patas, ¿cuántas aves y bestias viven en él? [Ayúdese de un sistema lineal de ecuaciones].

29. Una tienda de helados vende sólo helados con soda y malteadas. Se pone 1 onza de jarabe y 4 onzas de helado en un helado con soda, y 1 onza de jarabe y 3 onzas de helado en una malteada. Si la tienda usa 4 galones de helado y 5 cuartos de jarabe en un día, ¿cuántos helados con soda y cuántas malteadas vende? [Sugerencia: $\frac{1}{4} = 32$ onzas, $1 \text{ galón} = \frac{4}{4}$]

Segunda parte

En los ejercicios 1 a 12 resuelva el sistema lineal dado por medio del método de eliminación

1.
$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - 4y = 4 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 10 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x + 4y - z = 12 \\ 3x + 8y - 2z = 4 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = -12 \\ 2x - 3y - 4z = 15 \\ 3x + 4y + 5z = -8 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -12 \\ x - 2y + z = -5 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = -12 \\ 4x + 2y + 2z = 8 \\ x - y + z = 4 \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} 3x + 4y - z = 8 \\ 6x + 8y - 2z = 3 \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 5 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} x + y + 3z = 12 \\ 2x + 2y + 6z = 6 \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x - 2y = 3 \\ 5x + 2y = 27 \end{cases}$$

11.
$$\begin{cases} x - 5y = 6 \\ 3x + 2y = 1 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$$

12.
$$\begin{cases} x + 3y = 13 \\ x - 2y = 3 \\ 5x + 2y = 27 \end{cases}$$

13. Dado el sistema lineal $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = t \end{cases}$, determine:

- Un valor de t para que el sistema tenga una solución.
- Un valor de t para que el sistema no tenga solución.
- ¿Cuántos valores diferentes de t pueden seleccionarse en la parte (b)?

14. Dado el sistema lineal $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$, verifique que:

- $x_1 = 1$, $y_1 = -1$ y $z = -1$ es una solución.
- $x_2 = -2$, $y_2 = 2$ y $z_2 = 2$ es una solución.
- ¿ $x = x_1 + x_2 = -1$, $y = y_1 + y_2 = 1$, y $z = z_1 + z_2 = 1$ es una solución del sistema lineal?
- ¿ $3x, 3y, 3z$ donde x, y, z son como en la parte (c), una solución del sistema lineal?

15. Resuelva el sistema lineal siguiente sin utilizar el método de eliminación

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= -5 \\ 3y + z &= 7 \\ z &= 4. \end{aligned}$$

16. Resuelva el sistema lineal siguiente sin utilizar el método de eliminación

$$\begin{aligned} 4x &= 8 \\ -2x + 3y &= -1 \\ 3x + 5y - 2z &= 11. \end{aligned}$$

MATRICES

Recuerde que:

Definición: Una **matriz** A de $m \times n$ es un arreglo rectangular de mn números reales (o complejos) ordenados en m **filas** (renglones) horizontales y n **columnas** verticales:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

← fila (renglón) i

↑ columna j

La i -ésima fila de A es $[a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}]$ con $(1 < i \leq m)$.

La j -ésima columna de A es

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \text{ con } (1 \leq j \leq n).$$

Diremos que A es una matriz m por n (que se escribe $m \times n$).

Si $m = n$, decimos que A es una *matriz cuadrada de orden n* , y que los números $a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{nn}$ forman la *diagonal principal* de A , aquí se hace referencia al número a_{ij} , que está en la i -ésima fila (renglón) y la j -ésima columna de A .

Ej 1. Suponga que un fabricante tiene cuatro plantas, en cada una de las cuales se manufacturan tres productos. Si denotamos con a_{ij} el número de unidades del producto i elaboradas por la planta j en una semana, la matriz de 4×3 proporciona la producción semanal del fabricante. Por ejemplo, en una semana, la planta 2 produce 270 unidades del producto 3.

	Producto 1	Producto 2	Producto 3
Planta 1	560	340	280
Planta 2	360	450	270
Planta 3	380	420	210
Planta 4	0	80	380

Ej 2. Con el sistema lineal considerado en el siguiente ejemplo

$$x + 2y = 10$$

$$2x - 2y = -4$$

$$3x + 5y = 26,$$

podemos asociar las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

Ejercicios sobre matrices

1. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad c. \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- ¿Cuáles son los valores de a_{11} , a_{12} , a_{23} ?
- ¿Cuáles son los valores de b_{21} , b_{11} , b_{31} ?
- ¿Cuáles son los valores de c_{13} , c_{31} ?

2. Si $\begin{bmatrix} a+b & c+d \\ c-d & a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$ determine los valores de a , b , c , d .

3. $\begin{bmatrix} a+2b & 2a-b \\ 2c+d & c-2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ determine a , b , c y d .

En los ejercicios 4 a 6, sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. De ser posible, calcule la combinación lineal que se indica en cada caso:

- $C + E$ y $E + C$
- $A + B$
- $D - F$
- $-3C + 5O$
- $2C - 3E$ (f) $2B + F$

5. Calcule la combinación lineal que se indica en cada caso:

- $3D + 2F$
- $3(2A)$ y $6A$
- $3A + 2A$ y $5A$
- $2(D + F)$ y $2D + 2F$ ¿son iguales? Argumente su respuesta.
- $(2 + 3)D$ y $2D + 3D$ ¿son iguales? Argumente su respuesta.

6. Calcule:

- A^T y $(A^T)^T$
- $(C + E)^T$ y $C^T + E^T$ ¿Qué puede concluir?
- $(2D + 3F)^T$
- $2A^T + B$
- $(3D - 2F)^T$