Enrique Mateus-Nieves
PhD in Advanced math

Valores máximos y mínimos en funciones multivariadas

Prueba de la segunda derivada Supongamos que las segundas derivadas parciales de una función f son continuas en un disco de centro (a, b), y supongamos que $f_x(a,b) = 0$ y $f_y(a,b) = 0$, es decir, (a, b) es un punto crítico de f.

Sea $\boldsymbol{D = D(a,b) = f_{xx}|_{(a,b)} \cdot f_{yy}|_{(a,b)} - \left(f_{xy}|_{(a,b)}\right)^2}$

i. Si $D > 0, \wedge\ f_{xx}|_{(a,b)}$, $entonces\ f\ (a, b)\ es\ un\ mínimo\ relativo\ de\ f$

ii. Si $D > 0, \wedge\ f_{xx}|_{(a,b)} < 0$, $entonces\ f\ (a, b)\ es\ un\ máximo\ relativo\ de\ f$

iii. Si $D = 0$, El criterio no decide.

iv. Si $D < 0$, El criterio no decide si f tiene un máximo o mínimo. Se define $f(a, b)$ como un punto de silla.

Ejemplo:

Determine los valores máximos y mínimos relativos y los puntos de silla para la función
$f\ (x, y) = x\ 4 + y\ 4 - 4xy + 1$

Solución: primero calculamos las primeras derivas parciales de *f*, $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y\ \wedge . \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x$. Al igualar estas derivadas parciales con cero, se obtienen las ecuaciones $x^3 - y = 0,\ \ \wedge, y^3 - x = 0$. Para resolver estas ecuaciones, sustituimos $y = x^3$ de la primera ecuación en la segunda, y obtenemos:

$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$ de modo que hay tres raíces reales: $x = 0, 1, -1$.

Los tres puntos críticos son: $P_1(0,0);\ P_2(1,1);\ y\ P_3(-1,-1)$.

Luego calculamos las segundas derivadas parciales $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, y aplicamos el criterio definido anteriormente.
Como $D\ (0,0) = -16 < 0$, del caso *iii* del criterio de la segunda derivada, se infiere que en (0,0); f tiene un punto de silla.
Como $D\ (1,1) = 128 > 0 \wedge f_{xx}|_{(1,1)} = 12 > 0$, del caso *i* del criterio, se infiere que es un mínimo relativo de *f*.

Como $D\,(-1,-1) = 128 > 0 \wedge f_{xx}|_{(-1,-1)} = 12 > 0$, se infiere que también es un mínimo relativo de *f*.

Ejercicios

Determine y clasifique los puntos críticos de las siguientes funciones

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 7$	**2.** $f(x,y) = -3y^2 - x^2 + 6y + 4x + 5$
3. $f(x,y) = x^3y + 12x^2 - 8y$	4. $f(x,y) = y^4 + x^4 - 4xy + 2$
5. $g(x,y) = e^{4y-x^2-y^2}$	6. $n(x,y) = (1+xy)(x+y)$
7. $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$	8. $\mathrm{m}(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$
9. $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	10. $f(x,y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$
11. $f(x,y) = -4y^2 - x^2 + 4y - 2x + 9$	12. $f(x,y) = x + y + \frac{1}{x} + \frac{4}{y}$
13. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y$	14. $f(x,y) = x^3 + y^2 - 3x - 4y + 7$

15. Usando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, la producción semanal de una emro4esa está dada por $P(L,K) = 20K + 32L + 3LK - 2L^2 - 2.5K^2$. halle el número de unidades de mano de obra y de capital que la empresa debe utilizar a fin de maximizar su producción.

16. Una empresa utiliza dos tipos de materias primas, X y Y en su producto. Usando x unidades de X y y unidades de Y, la empresa puede elaborar P unidades del producto, con $P = 0.52x + 0.48y + 0.12xy - 0.07x^2 - 0.06y^2$. si el costo de cada unidad de X es de €5.1 y de €1.80 por cada unidad utilizada de Y, la empresa puede vender todas las unidades que produce a €15 cada una. ¿Qué cantidades de X y Y debería utilizar la empresa con el objeto de maximizar sus utilidades?

17. Usando L unidades de insumo de mano de obra y K unidades de insumo de capital, una empresa fabrica cierta producción de su artículo cuyo costo total T (en millones de dólares) está dado por $T = 40 - 5K - 3L - 2KL + 1.5K^2 + L^2$. Determine la cantidad de cada insumo que debería utilizar con el propósito de minimizar el costo de la empresa. ¿Cuál es ese costo mínimo?

BIBLIOGRAFÍA

• Cálculo varias Variable; Thomas George B., Finney Ross L.; Addison Wesley Longman; 9ª Edición.

• Cálculo Trascendentes Tempranas; Stewart James; International Thomson Editores; 3ª Edición.